Elemente

der

theorischen Astronomie

für Studierende bearbeitet

von

Dr. Karl Israel-Holtzwart,
Realgymnasial-Oberlehrer zu Frankfurt a. M.

Zweite Abteilung.

Berechnung der Finsternisse. — Meteorbahnen. — Stellarastronomie.

Wiesbaden.
Verlag von J. F. Bergmann.
1885.

Vorwort.

Mit der gegenwärtigen zweiten Abteilung der theorischen Astronomie gelangt das von dem Unterzeichneten verfaßte Kompendium insofern zu einem bestimmten Abschlusse, als dasselbe nunmehr eine Übersicht des gesamten, auf empirischer Grundlage beruhenden Teils der mathematischen Astronomie darbietet. Es umfaßt nämlich — außer den fundamentalen Hilfslehren und Aufgaben, welche sich auf Zeit und Ort der Beobachtung beziehen — die Theorie der astronomischen Koordinaten und die hiermit in engerer Verbindung stehenden Probleme, die Bestimmung der Bahnen der Planeten, Kometen, Meteorströme und Binärsterne, die Berechnung der Finsternisse und die daraus für die absolute Größe der planetarischen Entfernungen, die Genauigkeit der Tafeln u. s. f. sich ergebenden Folgerungen, sowie die Mechanik der ungestörten elliptischen Bewegung.

Letztere muß bereits als Übergang zu demjenigen Zweige der Astronomie betrachtet werden, welcher auf rein deduktivem Wege, unter alleiniger Voraussetzung des Gesetzes der allgemeinen Schwere, die Störungen der fortschreitenden und rotierenden Bewegung der Himmelskörper zu entwickeln hat. Es steht dieser Teil der Sternkunde allgemein in dem Rufe ganz besonderer Schwierigkeit. Aber, wie mir scheint, ohne hinreichenden Grund, solange man wenigstens, was die Regel bildet, die Untersuchung auf eine Feststellung der bedeutendsten Störungsgleichungen einschränkt. Die überwiegende Mehrzahl der im Gebiete der Perturbationen auftretenden Differentialgleichungen läßt sich nämlich — wenn nur die ersten Potenzen

der Massen und Excentricitäten in Betracht gezogen werden — auf so einfache Formen zurückführen, daß die Gestalt ihrer Integrale mit einigem Nachdenken nahezu erraten werden kann. Nur die **Herleitung** der integrabelen Formen selbst geschieht zum teil auf eine auffallend umständliche Weise, durch eine Fülle von Kombinationen und Umformungen der ursprünglich gegebenen Differentialgleichungen, welche gegen die Einfachheit des zu erreichenden Zwecks ziemlich stark absticht, und deren Studium die Ausdauer des Lesers allerdings auf eine harte Probe stellt. Indessen kann man auch diese Schwerfälligkeit in der Behandlung durch Anwendung geeigneter Hilfsmittel, namentlich Zuziehung einiger geometrischer Betrachtungen, leicht umgehen. Der letzte Teil meines Buchs, dessen Herausgabe, wenn nicht eine unvermutete Verzögerung eintritt, noch im Laufe dieses Sommers bevorsteht, wird den Beweis für diese Behauptung hoffentlich nicht schuldig bleiben.

Frankfurt a. M., 4. Juni 1885.

Dr. **Karl Israel-Holtzwart.**

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Einleitung in die Theorie der Finsternisse.

Seite 1—13.

Zweiter Abschnitt.

Theorie der Mondfinsternisse.

Seite 14—24.

Dritter Abschnitt.

Theorie der Sonnenfinsternisse.

Seite 25—67.

centralen, annularen Finsternis; der geocentrische Verlauf einer Sonnenfinsternis; Beginn und Schluß jener Phasen auf der Erde nach Zeit und Ort; Berechnung der Phasen für die totale Sonnenfinsternis vom 28. Juli 1851). — 2. Der Verlauf der Sonnenfinsternis für einen bestimmten Ort der Erdoberfläche, d. h. ihr parallaktischer Verlauf, nach Vorausschickung der zur Berechnung erforderlichen allgemeinen Gleichungen. Rechnungsbeispiel: Verlauf der Sonnenfinsternis vom 28. Juli 1851 für Königsberg. Die Parallaxe des Mondhalbmessers. Anderes Verfahren zur Berechnung der lokalen Finsternis, angewendet auf die Sonnenfinsternisse vom 3. August 431 v. Chr. und 21. Juni 400 v. Chr. — 3. Die Ausbreitung einer Sonnenfinsternis auf der Erdoberfläche: die Kurven gleicher Phase, insbesondere der Partialität, Totalität und Centralität, und die Kurven gleicher Dauer (Berechnung der Peripherieen der Schattenflecken; die vollständigen Bedingungsgleichungen für die Orte gleicher Phase, namentlich der Centralität; Rechnungsbeispiele; die allgemeinen Bedingungsgleichungen für die Orte gleicher Dauer. Tafel für je sechs Orte der Kurven der Centralität und Totalität bezüglich der Sonnenfinsternis vom 28. Juli 1851).

Vierter Abschnitt.

Die Sternbedeckungen und Durchgänge der unteren Planeten.

Seite 68—73.

1. Sternbedeckungen. — 2. Venusdurchgänge (Allgemeines; Möglichkeit dieser Durchgänge; ihre Perioden; Vorausberechnung des wahren und des parallaktischen Durchgangs; Bestimmung einiger für die Beobachtungen besonders wichtiger Erdörter.

Fünfter Abschnitt.

Anwendung der Mond- und Sonnenfinsternisbeobachtungen sowie der Durchgänge der unteren Planeten.

Seite 74—90.

1. Korrektion der geographischen Länge und der Mondtheorie aus der Beobachtung von Mond- und Sonnenfinsternissen. — 2. Korrektion der Sonnenparallaxe mit Hilfe von Durchgangsbeobachtungen der Venus (Methode der verschiedenen Dauer; Methode der korrespondierenden Phasen; Rechnungsbeispiel: Venusdurchgang vom 3. Juni 1769); Korrektion der Tafeln der inneren Planeten.

Sechster Abschnitt.

Die Bahnen der Meteorströme.

Stellarastronomie.

(Astronomie der Fixsterne.)

Siebenter Abschnitt.

Achter Abschnitt.

Die Bahnen der Binärsterne.

Theorie der Finsternisse und Bedeckungen.

Erster Abschnitt.
Einleitung in die Theorie der Finsternisse.

1. Scheinbare und wahre Finsternisse.

Ein selbstleuchtendes Gestirn kann — wenn überhaupt das von ihm ausströmende Licht in einer zu dessen Sichtbarkeit hinreichenden Menge zu uns gelangt und nicht durch anderes, intensiveres Licht überstrahlt wird — unserer Wahrnehmung nur durch das Dazwischentreten eines zweiten Körpers, welcher dessen Lichtstrahlen auffängt, entzogen werden, wobei jedoch von der zufälligen Verdunkelung infolge atmosphärischer Zustände abgesehen wird. Es erleidet alsdann jenes durch den zweiten Körper verdeckte Gestirn eine scheinbare Verfinsterung — scheinbar deshalb, weil dasselbe nicht seiner Leuchtkraft beraubt wird, sondern weil sein Licht nur infolge des Davortretens eines undurchsichtigen Körpers verhindert wird, zu uns zu dringen. Auch bei solchen Weltkörpern, welche, wie die Planeten und Trabanten, bloß erborgtem (reflektiertem) Lichte ihre Sichtbarkeit verdanken, können unter gleichen Umständen scheinbare Finsternisse hervorgerufen werden. Außerdem aber sind die Monde und ihre Hauptplaneten auch wahren Finsternissen unterworfen. Da dieselben nämlich nur durch die Sonne erleuchtet, an sich demnach dunkel sind,

so verlieren sie ihre Sichtbarkeit (sie erleiden wahre, nicht scheinbare Verfinsterung), sobald sie in einen von der Sonne nicht beschienenen, dunkeln Raum eintreten. Solche, den Sonnenstrahlen unzugängliche Räume sind nun die Kernschattenkegel der Planeten und Monde, und da ferner die durchschnittliche Entfernung der Hauptplaneten von ihren Monden geringer ist als die Längenausdehnung jener Schattenkegel, so können unter günstigen Umständen die Monde in den Schatten des Hauptplaneten gelangen und umgekehrt.

Beispiele scheinbarer Finsternisse sind die Bedeckungen der Sonne oder eines Fixsterns oder eines Planeten durch unseren Mond, eines Fixsterns oder eines Planeten durch einen zweiten Planeten, ferner die teilweisen Bedeckungen der Sonne durch einen der inneren Planeten (Venus und Merkur), welche sich durch einen kleinen, dunkeln, über die Sonnenscheibe hinziehenden Flecken zu erkennen geben und Vorübergänge oder Durchgänge der unteren Planeten genannt werden.

Beispiele wahrer Verfinsterungen bilden zunächst die Mondfinsternisse, welche sich dann ereignen, wenn die Monde, ganz oder zum Teil, sich in den Vollschatten ihres Hauptplaneten senken. Die Monde stehen in diesem Falle noch ebenso unbedeckt an der Himmelssphäre wie vor oder nach der Finsternis; sie würden uns deshalb auch alsbald wieder sichtbar werden, wenn der dunkle Raum des Schattenkegels plötzlich erleuchtet würde. — Aber auch die Hauptplaneten erleiden wahre, wenn auch immer nur teilweise Verfinsterungen, sobald sie nämlich durch den Vollschatten ihrer Monde gehen. Alsdann zieht ein kleiner, aber intensiv dunkler Schattenflecken über die leuchtende Scheibe des Hauptplaneten hinweg, eine Erscheinung, die man oft genug bei Jupiter und seinen Trabanten zu beobachten Gelegenheit hat. Es ist hiernach klar, daß ein solcher Flecken, z. B. einem Mondbewohner, auch auf unserer Erdscheibe erscheinen muß, wenn für den Erdbewohner eine totale Sonnenfinsternis stattfindet. Derartige Phänomene lassen mithin immer eine doppelte Auffassung zu: der Erdbewohner hat (scheinbare) Sonnenfinsternis und gleichzeitig der Mondbewohner (wahre) Erdfinsternis. Allerdings ist dem Mondbewohner nur ein sehr kleiner Teil der Erdoberfläche — soweit die-

selbe in den Vollschattenkegel des Monds fällt — unsichtbar, während einem Erdbewohner im Bereiche dieses dunklen Teils der Erdoberfläche (des Schattenfleckens) die Sonne total verfinstert erscheint.

Auch während der Durchgänge der unteren Planeten sieht man einen kleinen dunklen Flecken über die Sonne hinweggleiten, aber, obwohl diese Erscheinung äußerlich viel Ähnlichkeit mit den oben erwähnten Flecken Jupiters, so besteht doch zwischen beiden Phänomenen ein wesentlicher Unterschied. Der Flecken Jupiters haftet wirklich an der Oberfläche desselben, während der auf der Sonne wahrgenommene Flecken nur scheinbar auf der Oberfläche sich befindet, in Wirklichkeit aber dadurch veranlaßt ist, daß die Venus- oder Merkurscheibe zwischen Auge und Sonne hindurchzieht und während dieses Vorgangs die Sonnenstrahlen abhält, in das Auge zu gelangen.

Als wichtigster Unterschied zwischen wahrer und scheinbarer Finsternis, der zugleich für ihre ganze Berechnung maßgebend ist, muß nun der bezeichnet werden, daß der Verlauf einer scheinbaren Finsternis, je nach dem Standpunkte des Beobachters, ein durchaus verschiedener ist, daß hingegen der Verlauf einer wahren Finsternis für jeden Standpunkt der gleiche ist. — In dem Augenblicke, wo der Mondrand den Schattenkegel der Erde berührt, beginnt für alle Erdbewohner und auch für einen fingierten Beobachter im Mittelpunkte der Erde die Mondfinsternis; im Augenblicke, wo der Mondkörper vollständig in den Schattenkegel eingetreten ist, beginnt überall die totale Verfinsterung und dauert so lange, wie der Mond in dem Kegel verharrt. — Ganz verschieden hiervon sind die Verhältnisse bei einer wahren Verfinsterung, z. B. einer Sonnenfinsternis. Hier ändert sich mit dem Standpunkte auch die Erscheinung. Dem einen Beobachter wird zu einer bestimmten Zeit die Sonne durch den Mond ganz verdeckt, einem zweiten teilweise, einem dritten gar nicht. Ein Teil der Erdoberfläche kann in völliges Dunkel gehüllt sein, während gleichzeitig ein anderer im Halbdunkel oder im vollen Sonnenschein liegt. Infolge dieser Abhängigkeit der scheinbaren Finsternis vom Standpunkte (der Parallaxe) bietet ihre Berechnung auch ungleich mehr Schwierigkeiten als die einer wahren Finsternis.

Eine erschöpfende Auseinandersetzung dieser umfangreichen Rech-

nungen würde über die diesem Buche gezogenen Grenzen hinausgehen. Wir müssen uns bescheiden, hier nur die Grundzüge derselben darzustellen, wobei wir folgende Einteilung des Stoffs zu Grunde legen:

a) die allgemeinen Erscheinungen der Sonnen- und Mondfinsternisse und ihre Erklärung,
b) die Bedingungen des Eintretens
   α) der Mondfinsternisse
   β) der Sonnenfinsternisse,
c) die Periode der Mond- und Sonnenfinsternisse,
d) die Berechnung des Verlaufs einer Mondfinsternis für den Mittelpunkt (also auch jeden anderen Punkt) der Erde,
e) die Ausbreitung der Mondfinsternis auf der Erdoberfläche,
f) Anfang und Ende der verschiedenen Phasen einer Sonnenfinsternis auf der Erdoberfläche,
g) die Berechnung des geocentrischen Verlaufs einer Sonnenfinsternis,
h) die Berechnung des Verlaufs einer Sonnenfinsternis für einen gegebenen Ort der Erdoberfläche,
i) die Ausbreitung einer Sonnenfinsternis auf der Erde,
k) die Berechnung einer Sternbedeckung, insbesondere eines Venusdurchgangs,
l) Anwendung der Finsternisse und Bedeckungen
   α) zur Korrektion der geographischen Länge,
   β) zur Korrektion der Tafeln der inneren Planeten und des Monds,
   γ) zur Bestimmung der Sonnenparallaxe.

2. Die allgemeinen Erscheinungen der Sonnen- und Mondfinsternisse.

Befinden sich Sonne, Erde und Mond, nachdem man den Ort des letzteren auf die Ekliptik projiziert hat, in der Stellung der Figur 1α, haben also Sonne

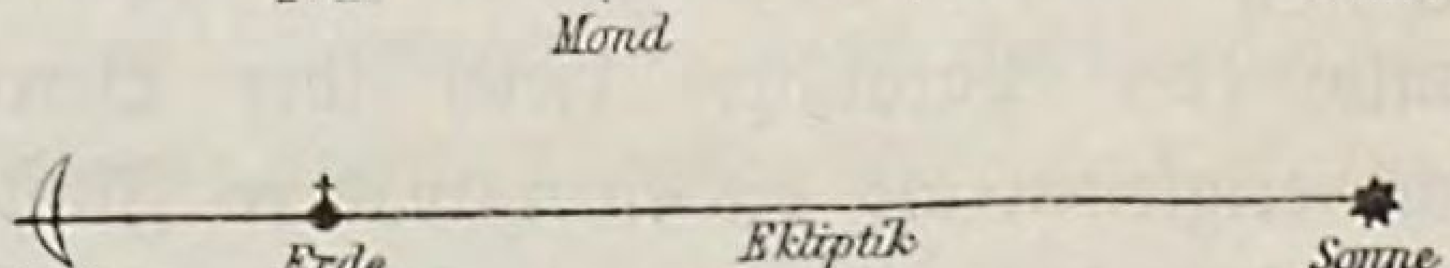


Fig. 1α.

Fig. 1β.

und Mond gleiche geocentrische Länge, dann sagt man, Sonne und Mond seien in Konjunktion (☌). Differieren hingegen die geocentrischen Längen dieser beiden Gestirne um 180°, wie in Figur 1 β, dann stehen sie in Opposition (☍). Beide Konstellationen heißen mit einem gemeinsamen Namen die Syzygien.

Nur während einer Konjunktion kann offenbar einem Erdbewohner die Sonne durch den Mond verdeckt werden, d. h. kann eine Sonnenfinsternis stattfinden, und nur zur Zeit einer Opposition kann der Mond in den Schatten der Erde treten, d. h. kann sich eine Mondfinsternis ereignen. Da indessen der Mond sich nicht in der Ekliptik bewegt, so ist nicht notwendig jede Konjunktion oder Opposition von einer Finsternis begleitet. Vielmehr kann der Mond zur Zeit der Syzygien so weit von der Ekliptik abstehen, daß er in dem einen Falle die Sonne nicht bedeckt und in dem anderen Falle nicht in den Schattenkegel der Erde eintaucht, wobei man zu beachten hat, daß die Mittelpunkte der Sonne und Erde, mithin auch die Achse des Schattenkegels der Erde stets in der Ekliptik liegen. Eine Sonnen- oder Mondfinsternis nennt man eine Eklipse (ekleipsis = Ausfallen, Verschwinden). Daher heißen solche Syzygien, welche mit einer Finsternis verbunden sind, ekliptisch, daher wird ferner die Ebene der Erdbahn, in deren Nähe nur die Sonnen- und Mondfinsternisse eintreten können, die Ebene der Ekliptik genannt.

Ist eine Opposition ekliptisch, dann kann der Mond sich entweder teilweise in den Schattenkegel der Erde senken (partiale Mondfinsternis) oder vollständig (totale M.). Trifft es sich im letzteren Falle, daß der Mondmittelpunkt durch die Achse des Schattenkegels hindurchgeht, dann findet eine totale und centrale Mondfinsternis statt. In dem Momente der centralen Mondfinsternis liegen die Mittelpunkte der Sonne, der Erde und des Monds in gerader Linie, alle drei Punkte also in der Ekliptik. Da der Mond sich in einem seiner Knoten befindet, wenn sein Mittelpunkt in die Ekliptik fällt, da ferner die Knotenlinie des Monds ebenfalls stets durch den Mittelpunkt der Erde geht, so kann man auch sagen: im Momente der centralen Mondfinsternis fällt die Schattenachse der Erde mit der Knotenlinie des Monds zusammen. Eine annulare (ringförmige) Mondfinsternis,

die sich dadurch auszeichnen würde, daß nur der mittlere Teil der Mondscheibe in dem Erdschatten läge, ihre Ränder (ihre peripherischen Teile) aber erleuchtet blieben, ist aus dem Grunde nicht möglich, weil der Durchmesser des Erdschattens in der Gegend des Monds ungefähr die dreifache Größe des Monddurchmessers besitzt. — In Fig. 2 ist der ungefähre Verlauf einer centralen Mondfinsternis zur Darstellung gebracht. Die großen Kreise versinnlichen den Durchschnitt des Erdschattens in der Gegend, wo er vom Monde durchschnitten wird, während die kleinen Kreise die Mondscheibe andeuten. Der ersterere bewegt sich allmählich von der Stellung 1 nach 8; der Mond von D aus nach seinem Knoten N. Anfangs befindet sich der Mond noch völlig außerhalb des Schattens; er dringt im weiteren Verlaufe mehr und mehr in denselben ein und im (aufsteigenden) Knoten fallen Mond- und Schattenmittelpunkt zusammen. Dies ist der Augenblick der centralen Finsternis. Vom Knoten an entfernen sich beide Mittelpunkte wieder mehr und mehr voneinander; in der Stellung 7 findet die letzte äußere Randberührung, also das Ende der Finsternis statt; in 8 hat die Mondscheibe den Schatten wieder vollständig verlassen.

Weit zusammengesetzter sind die Erscheinungen einer Sonnenfinsternis. Zur Veranschaulichung derselben dient Fig. 3. Der Mittelpunkt der Sonne liege in c, der des Monds in c_1. Zieht man an

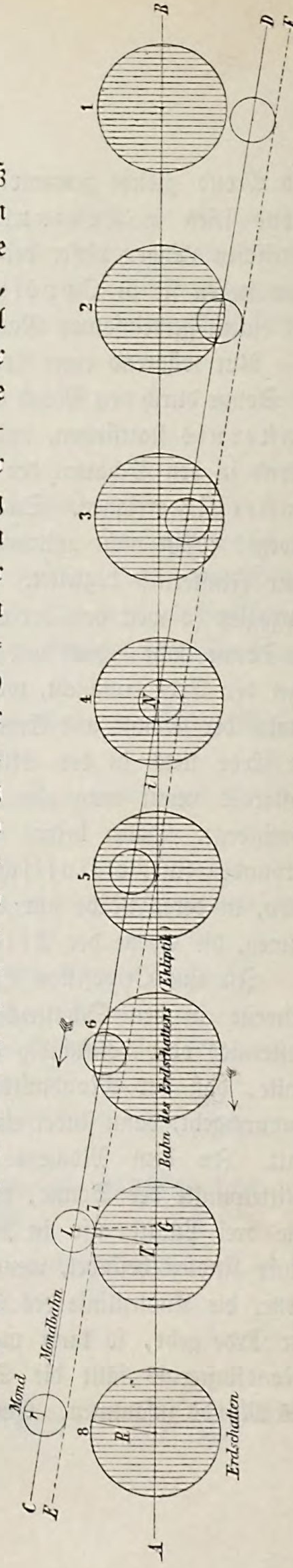


Fig. 2.

beide Weltkörper die äußeren Tangenten, ht und $h_1 t_1$ sowie die inneren he_1 und $h_1 e$, dann vermag nach physikalischen Gesetzen das Sonnenlicht in den Raum atb (den sog. Kernschatten) gar nicht einzudringen; der Raum tfg (ringförmiger oder annularer Schatten) wird lediglich von den Rändern der Sonne, die Räume edtf und $g t d_1 e_1$ (partialer oder Halbschatten) endlich werden nur von sichelförmigen Teilen der Sonnenscheibe erleuchtet. Einem Auge im Gebiete des Kernschattens wird die Sonne gänzlich verdeckt; dasselbe hat totale und, wenn es außerdem auf der Centralen $c c_1 t$ sich befindet, auch centrale Finsternis. Ein Auge im Bereiche des annularen Schattens, z. B. in m, sieht nur die Sonnenränder, — wovon man sich leicht überzeugt, wenn man von m aus die Tangenten mi und $m i_1$ an den Mond zieht. Liegt überdies, wie im Falle der Figur, der Beobachtungsort m auf der Achse des Schattenkegels, dann hat dieser Ort eine annulare und centrale Sonnenfinsternis; alsdann sendet nur noch die in der Figur schraffierte Zone

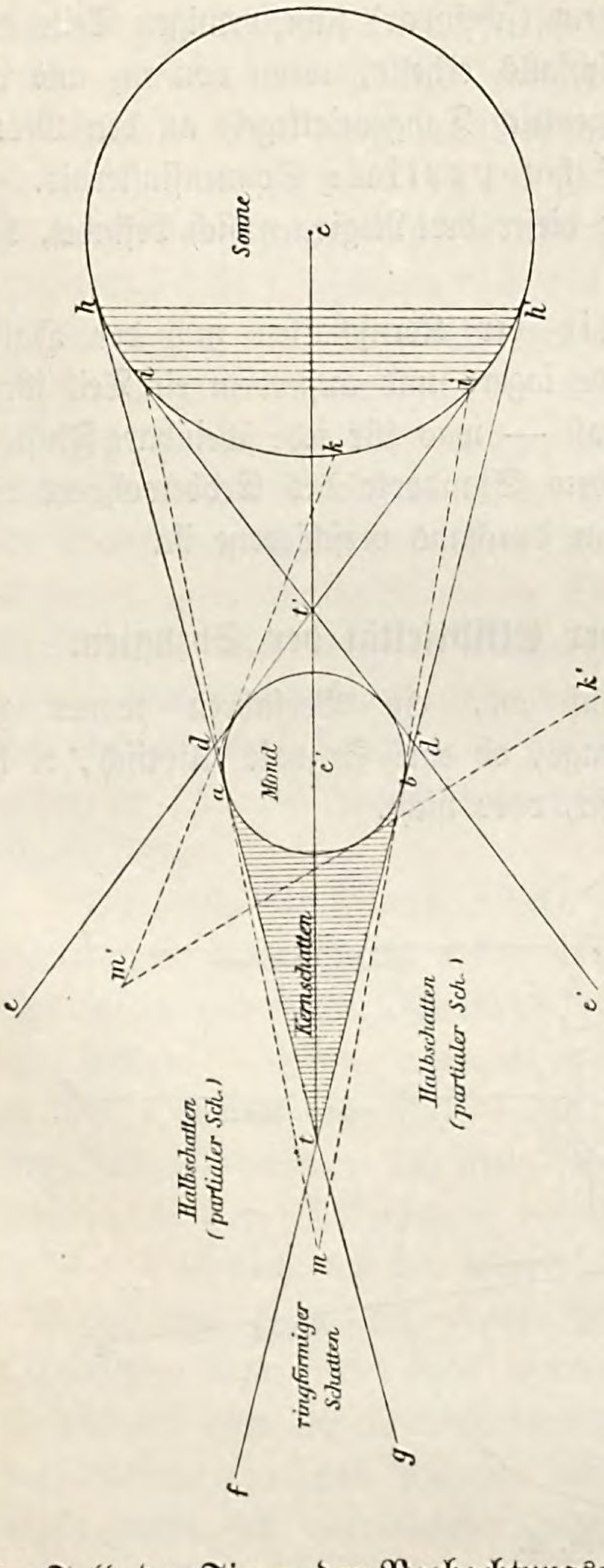


Fig. 3.

$i h i_1 h_1$ ihre Strahlen nach dem Auge in m, indem sie diesem als leuchtender Ring erscheint. — Ein Auge in dem Halbschatten, z. B. in m^1, empfängt bloß von einem (scheinbar) sichelförmigen Teile des Sonnenkörpers Licht, was gleichfalls erhellt, wenn von m_1 aus die Tangenten $m^1 k$ und $m^1 k^1$ (eigentlich Tangentialkegel) an den Mond gelegt werden. Der Punkt m^1 hat partiale Sonnenfinsternis. — Ein Auge endlich, das in keiner dieser drei Regionen sich befindet, hat vollen Sonnenschein.

Es kann nun gleichzeitig der Kernschatten und der Halbschatten des Monds auf der Erde lagern und außerdem ein Teil ihrer Oberfläche schattenfrei sein, so daß — was für jede scheinbare Finsternis bezeichnend ist — je nach dem Standorte des Erdbewohners die Erscheinung zu derselben Zeit eine durchaus verschiedene ist.

3. Die Bedingungen der Ekliptizität der Syzygien.

Zunächst kommt es darauf an, ein Verfahren kennen zu lernen zur Entscheidung der Frage, ob eine Syzygie ekliptisch, d. h. mit einer Finsternis verbunden sei, oder nicht.

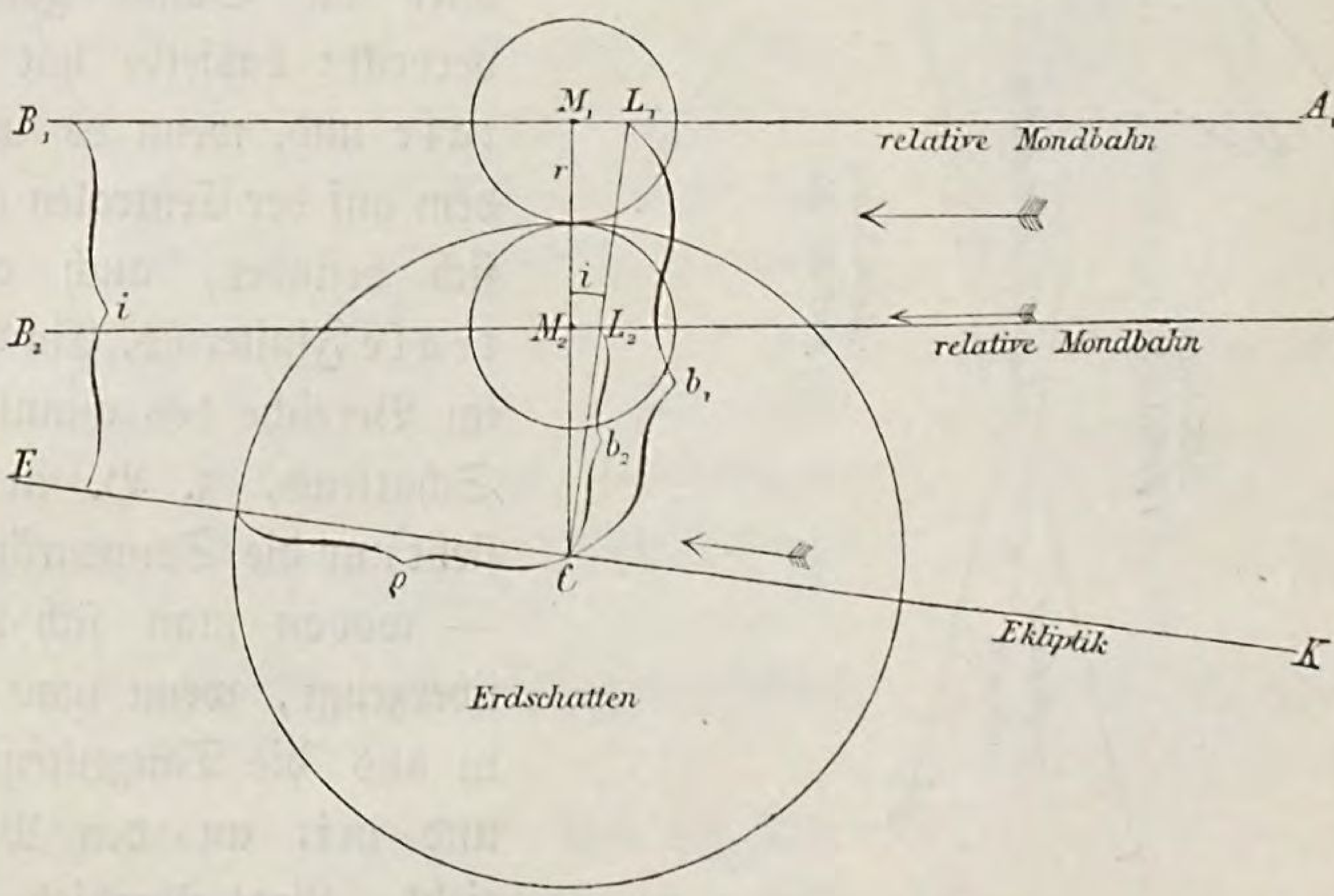


Fig. 4.

Wir beginnen damit, die Bedingung für die Ekliptizität der Opposition, also für das Stattfinden einer Mondfinsternis,

aufzustellen, wobei wir uns der Fig. 4 bedienen, in welcher EK die Ekliptik, C den Mittelpunkt des Erdschattens darstellt. Es erleichtert nun die gesamte Untersuchung wesentlich, wenn wir uns diesen Mittelpunkt — der in Wirklichkeit, entsprechend der progressiven Bewegung der Erde, in der Ekliptik fortschreitet, indem seine Länge ununterbrochen zunimmt — als ruhend denken. Um diese der Natur widersprechende Annahme auszugleichen, hat man nur nötig den Mondmittelpunkt M_1 (bezw. M_2) nicht mit seiner absoluten, sondern mit seiner relativen Geschwindigkeit in Länge sich fortbewegen zu lassen, d. h. mit einer Geschwindigkeit, die gleich ist der absoluten Geschwindigkeit des Monds in Länge (in der Ekliptik) weniger der Bahngeschwindigkeit des Erdschattens, oder, was dasselbe ist, der Erde — da nämlich der Mond und der Erdschatten nach derselben Richtung fortschreiten, also mit der Differenz ihrer Geschwindigkeiten sich voneinander entfernen. Durch Einführung dieser relativen Längengeschwindigkeit des Monds ändert man an dem scheinbaren Verlaufe des Phänomens offenbar gar nichts. — Die Geschwindigkeit der Breite des Monds bleibt von dieser Annahme unberührt, da der Erdschatten stets in der Ekliptik liegt, also keine Breite besitzt.

Die Bahn des Monds, welche unter Voraussetzung eines ruhenden Erdschattens sich ergiebt, nennt man seine relative Bahn. Da hier immer nur kleine Teile dieser Bahn in Betracht kommen, so kann man dieselbe — ebenso wie andere kleine Bogen, z. B. den, welcher die Breite des Monds mißt — als gerade Linien betrachten. — Das Auge des Beobachters hat man sich hierbei im Erdmittelpunkte vorzustellen, so daß die Visierlinie nach dem Mittelpunkte des Erdschattens in Fig. 4 senkrecht auf der Ebene dieser Figur zu stehen kommt.

Ist nun $A_1 B_1$ die relative Mondbahn zur Zeit einer gewissen Opposition, dann findet diese letztere statt, wenn der Mondmittelpunkt L_1 senkrecht über dem Schattenmittelpunkte C sich befindet. Die größte Verfinsterung (größte Phase) herrscht in dem Momente, wo beide Mittelpunkte sich am nächsten stehen. Denkt man sich also von C aus eine Senkrechte CM_1 auf die relative Mondbahn gefällt, dann stellt dieselbe die kürzeste Entfernung der beiden Centra und M_1 den Ort des Mondmittelpunkts im Augenblick der größten Verfinsterung dar.

Da $CL_1 = b_1$ die Breite des Monds in der Opposition angiebt — die sich u. a. nach dem bereits früher in dem Abschnitte „Interpolation" besprochenen Verfahren aus den Tafeln berechnen läßt — da ferner $< MCL_1$ = Neigung der relativen Mondbahn gegen die Ekliptik $= i$, so läßt sich die kürzeste Distanz $CM_1 = d$ aus der Gleichung:

$$d = b_1 \cos i$$

bestimmen. Die Neigung i der relativen Mondbahn gegen die Ekliptik ist, wie die der absoluten Mondbahn, immer nur um ein weniges größer als 5°, mithin $\cos i = 0{,}996$. Man kann deshalb, zumal b_1 selbst immer nur eine kleine Größe ist, in dieser vorläufigen Untersuchung

$$d = b_1 = \text{Breite in der Opposition}$$

setzen.

Ergiebt sich nun, daß

$$d = b_1 = \text{Schattenradius} + \text{Mondradius}$$
$$= \varrho + r,$$

dann berührt (vgl. die relative Bahn $A_1 B_1$ der Fig. 4) die Mondscheibe zur Zeit der größten Phase den Schattenkegel von außen — Grenze der partialen Finsternis.

Wäre (vgl. die relative Bahn $A_2 B_2$ der Fig. 4):

$$d = b_2 = \varrho - r,$$

dann bestände die größte Phase in innerer Randberührung — Grenze der totalen Finsternis.

Ist demnach

$$d < \varrho + r,$$

dann darf mindestens eine partiale Finsternis, ist

$$d < \varrho - r,$$

dann darf eine totale Finsternis erwartet werden.

Wir haben hiermit die gesuchten Bedingungen für das Eintreten einer partialen oder totalen Mondfinsternis.

Diese vorbereitende Rechnung setzt demnach voraus, daß man außer der Breite d des Monds im Augenblicke der Opposition, sowie

der Größe des Mondradius r (welche beide mittels der astron. Tafeln bestimmt werden), auch

den Erdschattenradius ϱ

kennt. Die Bestimmung dieses letzteren stützt sich auf einen

Lehrsatz des Hipparch,

der durch folgende Gleichung ausgesprochen werden kann:

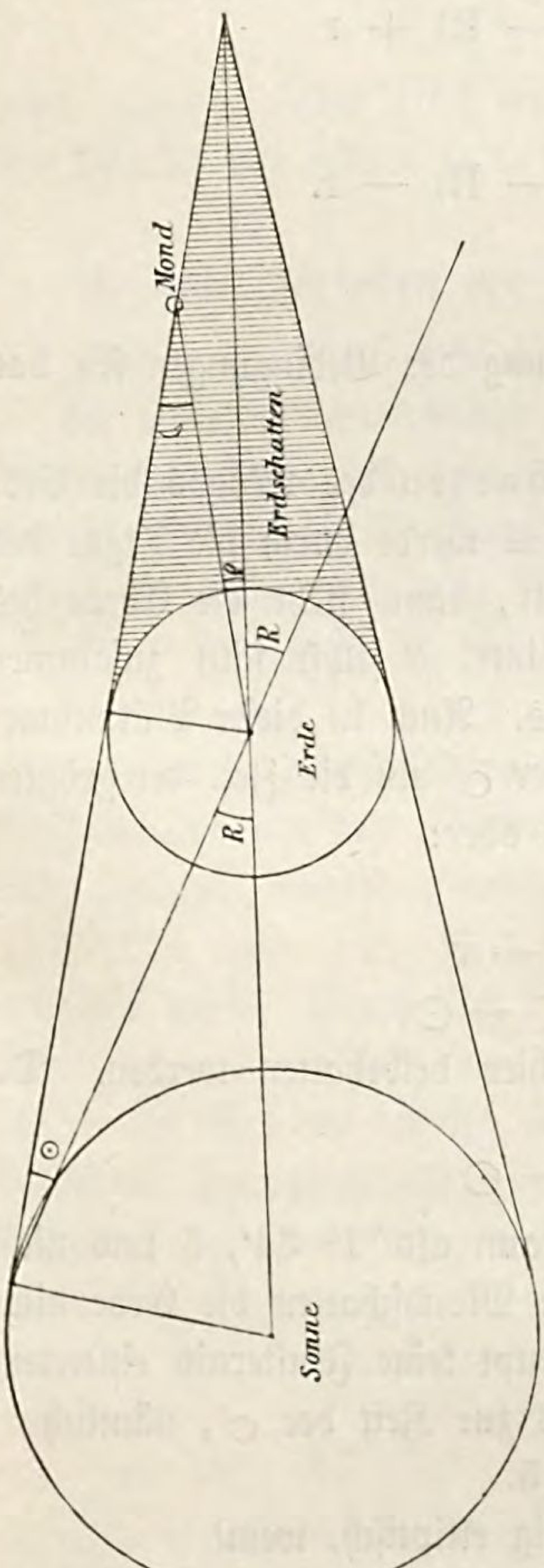


Fig. 5.

Schattenradius = Sonnenparallaxe plus Mondparallaxe minus Sonnenradius,

oder, wenn man die Sonnenparallaxe (den Winkel, unter welchem der Erdradius von der Sonne aus erscheint) mit $\odot$,

die Mondparallaxe mit ☾,

den Sonnenradius mit R,

den Schattenradius in der Mondgegend mit ϱ bezeichnet:

$$\varrho = \odot + ☾ - \mathrm{R}.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung ergiebt sich in der Form

$$\varrho + \mathrm{R} = \odot + ☾$$

sehr einfach mit Hilfe der Figur 5.

Der mittels dieser Relation erhaltene Halbmesser des Erdschattens stimmt jedoch mit den Beobachtungen — infolge störender optischer Einflüsse — nicht ganz überein, indem er (nach Tobias Mayer) etwa um $\frac{1}{60}$ zu klein erscheint. Daher lautet die verbesserte Gleichung:

$$\varrho = \frac{61}{60} (\odot + ☾ - \mathrm{R}).$$

Man trägt dieser Korrektion am

einfachsten dadurch Rechnung, daß man zu dem tabellarisch bestimmten Aggregat ☉ + ☾ — R noch so viel Sekunden hinzufügt, als es selbst Minuten umfaßt (da $\frac{1}{60}$ Min. = 1 Sek.).

Mit Zuziehung des vorstehenden Lehrsatzes lassen sich nun die obigen Bedingungen für die Grenzen der Möglichkeit einer Finsternis folgendermaßen aussprechen:

Es findet eine partiale Finsternis statt, wenn

$$d < \frac{61}{60}(\odot + ☾ - R) + r$$

und eine totale, wenn:

$$d < \frac{61}{60}(\odot + ☾ - R) - r.$$

Wenden wir uns nun zur Feststellung der Bedingungen für das Eintreten einer Sonnenfinsternis.

In Figur 8 berührt der Halbschatten des Monds die Erde im Punkte T. Nehmen wir nun an, es werde durch die Figur der Moment der Konjunktion (☌) dargestellt, dann steht die Ebene des Winkels β senkrecht zur Ekliptik und Winkel β selbst fällt zusammen mit der geocentrischen Breite des Monds. Auch in dieser Präliminar-Untersuchung darf man den Augenblick der ☌ als die Zeit der größten Phase der Finsternis betrachten. Es ist aber:

$$\begin{aligned}\beta &= x + y + z \\ &= x + z + u - v \\ &= R + r + ☾ - \odot,\end{aligned}$$

wenn die obigen Bezeichnungen auch hier beibehalten werden. Da nun die Größe

$$R + r + ☾ - \odot$$

erfahrungsgemäß nicht größer werden kann als 1° 34′, 5 und nicht kleiner als 1° 24′, so kann der partiale Mondschatten die Erde nicht mehr berühren, es kann demnach überhaupt keine Finsternis eintreten, wenn die geocentrische Breite des Monds zur Zeit der ☌, nämlich

$$\beta > 1^0\ 34', 5.$$

Andererseits ist die Konjunktion notwendig ekliptisch, wenn

$$\beta < 1^0\ 24'.$$

In Figur 9 berührt der Kernschatten des Monds die Erde in T. Es ist aber in diesem Falle, wenn die Figur wiederum den Zeitpunkt der Konjunktion angiebt:

$$\text{geoc. Breite } \beta = y + z - x$$
$$= u - v + z - x$$
$$= ☾ - \odot + r - R.$$

Wenn also

$$\beta < ☾ - \odot + r - R,$$

dann gelangen einige Teile der Erdoberfläche sicher in den Kernschatten des Monds und haben totale Sonnenfinsternis.

4. Die Perioden der Mond- und Sonnenfinsternisse.

Schon den Alten war es bekannt, daß nach 18 Jahren 11 Tagen — der babylonischen Periode Saros — sowohl die Mond- als die Sonnenfinsternisse fast genau in derselben Reihenfolge wiederkehrten, und sie gründeten auf diesen Cyklus ihre Vorausberechnung der Finsternisse. Es erklärt sich diese Thatsache einfach daraus, daß

18 J. 11 T. = 242 drakon. Monaten
= 223 synod. Monaten.

Gehen wir nämlich von einer ☌ oder ☍ aus, die mit einem Knotendurchgange des Monds zusammenfällt, dann wird nach Ablauf einer ganzen Anzahl synodischer Monate wieder Konjunktion oder Opposition und nach Verlauf einer ganzen Anzahl von Drachenmonaten wieder Durchgang des Monds durch denselben Knoten stattfinden — nach Ablauf von 18 Jahren 11 Tagen also gemäß den obigen Gleichungen dieselbe Syzygie mit demselben Knotendurchgange wiederum zusammentreffen, so daß während dieses Zeitraums der Kreislauf der Erscheinungen (Konstellationen) sich wiederholt.

Zweiter Abschnitt.

Theorie der Mondfinsternisse.

---

1. Der Verlauf einer Mondfinsternis für den Mittelpunkt der Erde.

Da eine Mondfinsternis für alle Punkte der Erde gleichartig verläuft, so ist es am einfachsten, die Berechnung für den Mittelpunkt der Erde anzustellen, weil die astronomischen Tafeln gleichfalls für diesen Punkt eingerichtet sind.

In Figur 6 stellen $M_0 M_3$ die relative (geradlinig angenommene) Mondbahn dar, und zwar

M_0 den Ort des Monds zur Zeit der ersten äußeren Randberührung mit dem Erdschatten (Beginn der Finsternis),

M_1 den Ort des Monds zur Zeit der Opposition,

M_2 den Ort desselben zur Zeit der größten Phase (Mitte der Finsternis).

M_3 den Mondort bei der zweiten äußeren Randberührung (Ende der Finsternis).

Die nächste Aufgabe besteht nun in der genauen Ermittelung der

Zeit der Opposition.

Man kann sich hierzu der in dem Abschnitte „Interpolation“ ausführlich behandelten Methode bedienen, indem man erwägt, daß im Momente der ☍ die Differenz der geocentrischen Länge des Monds und der Sonne 180° beträgt.

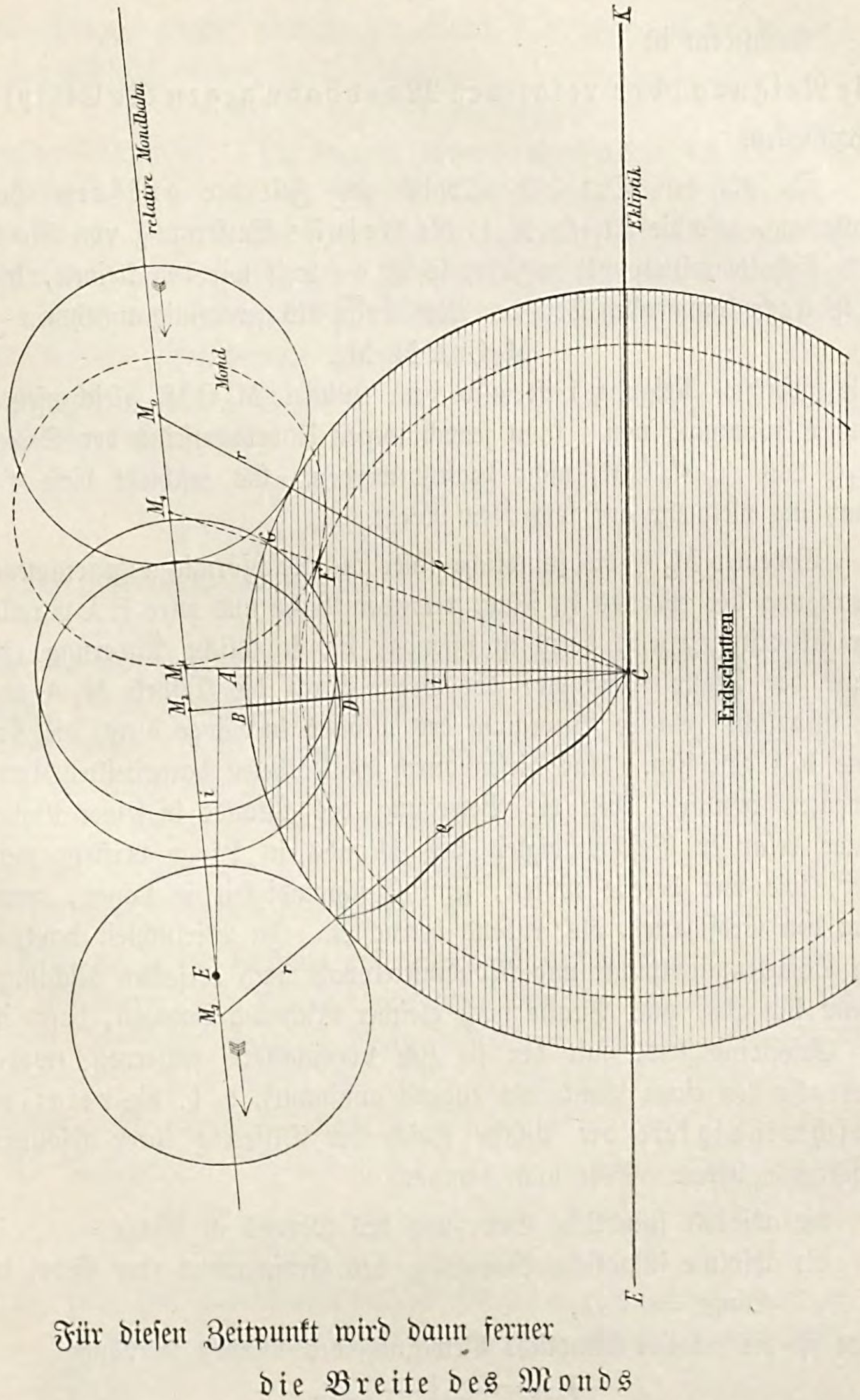


Fig. 6.

Für diesen Zeitpunkt wird dann ferner

die Breite des Monds

bestimmt, also in Fig. 6 die auf der Ekliptik senkrechte Strecke M_1 C.

Nächstdem ist

die Neigung i der relativen Mondbahn gegen die Ekliptik festzustellen.

Da M_2 den Ort des Monds zur Zeit der größten Verfinsterung, also die Strecke M_2C die kleinste Entfernung von Mond- und Schattenmittelpunkt angiebt, so ist — weil wir den kleinen, hier in Betracht kommenden Teil der Mondbahn als geradlinig annehmen —

$$M_2C \perp M_0M_3.$$

Die gesuchte Neigung i ist also dem Winkel M_2CM_1 gleichzusetzen. Zur Bestimmung von i kann jedoch wegen Unbekanntseins der Strecke M_2C das $\triangle\ M_2CM_1$ nicht benutzt werden. Es geschieht diese Bestimmung vielmehr auf folgendem Wege.

Bedeutet M_1E die stündliche (hier als gleichförmig angenommene) Bewegung des Monds in seiner relativen Bahn und wird EA parallel zur Ekliptik gezogen, dann ist offenbar die stündliche Änderung (im Falle der Figur Abnahme) der Breite durch die Kathete M_1A und die stündliche relative Bewegung des Monds in Länge durch die Kathete EA gemessen. Aus diesen durch die Katheten dargestellten Komponenten resultiert eben die Bewegung des Monds in seiner Bahn. Unter relativer Geschwindigkeit des Monds in Länge versteht man aber, wie wir bereits wissen, seine Geschwindigkeit in Länge, wenn man den Erdschatten als ruhend betrachtet. In Wirklichkeit bewegen sich Schattenmittelpunkt und Mondmittelpunkt nach derselben Richtung. Wenn sich aber zwei Punkte nach gleicher Richtung bewegen, dann ist die Geschwindigkeit, mit der sie sich voneinander entfernen (wobei man also den einen Punkt als ruhend annimmt), d. h. die relative Geschwindigkeit der Punkte gleich der Differenz ihrer absoluten Geschwindigkeiten. Setzt man demnach

die absolute stündliche Bewegung des Monds in Länge $= \triangle\ l$,
die absolute stündliche Bewegung des Erdschattens (der Erde) in Länge $= \triangle\ \lambda$,

dann ist die relative stündliche Bewegung des Monds in Länge

$$EA = \triangle l - \triangle\ \lambda.$$

Dabei ist allerdings zu bemerken, daß die Längen streng genommen

in der Ekliptik gezählt werden, die Strecke EA aber um die Breite b von der Ekliptik absteht, so daß eigentlich

$$EA = (\triangle l - \triangle \lambda) \cos b$$

gesetzt werden müßte. Da aber die Finsternisse stets in der Nähe der Mondknoten (also auch der Ekliptik) eintreffen, so ist b klein genug, um $\cos b = 1$ anzunehmen, wofern es sich nicht um eine ganz strenge Untersuchung handelt. Übrigens fällt diese Annahme damit zusammen, daß während der Dauer der Finsternis die Bewegung des Monds als geradlinig und gleichförmig vorausgesetzt wird.

Bezeichnet man nun ferner die stündliche Änderung der Breite des Monds, also (s. Fig. 6) $M_1 A$ durch

$\triangle b$, dann folgt:

$$\operatorname{tg} i = \frac{\triangle b}{\triangle l - \triangle \lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Die stündlichen Inkremente

$$\triangle b, \ \triangle l, \ \triangle \lambda$$

können sämtlich den Tafeln entnommen werden; es darf deshalb die Neigung i der relativen Mondbahn durch die obige Gleichung als bestimmt gelten. Nur ist noch hinzuzufügen, daß die stündliche Änderung der Länge des Mondschattens, also $\triangle \lambda$, ebenso groß ist wie die stündliche Änderung der geocentrischen Sonnenlänge, oder auch wie die stündliche Änderung der heliocentrischen Länge der Erde, welche durch die Tafeln unmittelbar gegeben ist.

Nachdem so die Neigung der relativen Mondbahn aus den stündlichen Inkrementen der Mond- und Sonnenkoordinaten, außerdem die Zeit der Opposition sowie die Breite des Monds für diesen Zeitpunkt gefunden sind, ist es leicht, den gesamten Verlauf der Finsternis zu bestimmen. Es ergiebt sich nämlich (Fig. 6):

1) Stündlicher Weg des Monds in der relativen Bahn

$$M_1 E = \triangle s = \sqrt{(\triangle l - \triangle \lambda)^2 + \triangle b^2}$$
$$= \triangle b : \sin i,$$

2) Weg des Mondmittelpunkts von der Opposition bis zur Mitte der Finsternis (Zeit der kleinsten Distanz oder größten Phase):

$$M_1 M_2 = b . \sin i,$$

3) Kleinste Distanz der Mittelpunkte des Monds und des Erdschattens:

$$CM_2 = d = b.\cos i,$$

4) Weg des Monds vom Anfange bis zur Mitte der Finsternis, bezw. von der Mitte bis zum Ende:

$$M_0 M_2 = M_2 M_3 = \sqrt{(\varrho + r)^2 - b^2 \cos^2 i}$$

5) Zeit zwischen Opposition und Finsternismitte

$$= \frac{M_1 M_2}{EM_1} = \frac{b \sin i}{\sqrt{(\triangle l - \triangle \lambda)^2 + \triangle b^2}} \text{ Stunden,}$$

da EM_1 die während einer Stunde zurückgelegte Strecke bedeutet,

6) Zeit vom Anfange der Finsternis bis zur Mitte

$$= \frac{M_0 M_2}{EM_1} = \sqrt{\frac{(\varrho + r)^2 - b^2 \cos^2 i}{(\triangle l - \triangle \lambda)^2 + \triangle b^2}} \text{ Stunden,}$$

7) Dauer der gesamten Finsternis = dem Doppelten der unter 6 erhaltenen Zeit,

8) Zeit der Mitte der Finsternis (cf. 5 und 1)

$$= \text{Zeit der Opposition} \pm \frac{b \sin^2 i}{\triangle b},$$

je nachdem die Finsternis am ab- oder aufsteigenden Knoten stattfindet,

9) der zur Zeit der größten Phase verfinsterte Teil des Monddurchmessers in Zollen (wobei Monddurchmesser = 2 r = 12 Zoll):

$$M_2 D - M_2 B = BD = \frac{r - (b \cos i - \varrho)}{2r} \cdot 12 \text{ Zoll,}$$

10) die Zeit der m-zolligen Finsternis ist, wenn $FG = m$ Zoll $= \frac{1}{6} mr$,

$$= \text{Zeit der Finsternismitte} \pm \frac{M_2 M_4}{EM_1}$$

$$= \text{Zeit der Finsternismitte} \pm \frac{\sqrt{(CM_4)^2 - (CM_2)^2}}{EM_1}$$

$$= \text{Zeit der Finsternismitte}$$

$$\pm \sqrt{\frac{(\varrho + r - \frac{1}{6} mr)^2 - b^2 \cos^2 i}{(\triangle l - \triangle \lambda)^2 + \triangle b^2}} \text{ Stunden.}$$

2. Numerische Berechnung der Mondfinsternisse.

Erstes Rechnungsbeispiel:

Mondfinsternis vom 1. Juni 1863.

Nach dem Berliner Jahrbuche hat man:

1863	Länge d. Monds l	Breite d. Monds b	Parallaxe des Monds ☾	Scheinb. Radius des Monds r
1. VI. 0^h	$243^0 15' 33'',5$	$-0^0 20' 29'',2$	$60' 27'', 0$	$16' 30'', 0$
12^h	$250^0 40' 1'',4$	$+0^0 20' 38'',6$	$60' 40'', 7$	$16' 33'', 7$
2. VI. 0^h	$258^0 7' 22'',3$	$+1^0 1' 41'',1$	$60' 50'', 2$	$16' 36'', 3$

1863	Länge der Sonne λ	Parallaxe der Sonne ⊙	Radius der Sonne R
1. VI. 0^h	$70^0 25' 9'', 8$	$8'', 5$	$15' 47'', 5$
2. VI. 0^h	$71^0 22' 35'', 8$	$8'', 5$	$15' 47'', 4$

Aus diesem Schema ersieht man, daß am 1. Juni 1863 um 0^h mittlerer Berliner Zeit, astronomisch gerechnet (also 12^h mittags bürgerlich) die Differenz zwischen Mond- und Sonnenlänge ca. 173^0, am 2. Juni um dieselbe Zeit ca. 187^0 beträgt, daß demnach die ☍, wo die Differenz $= 180^0$, sehr nahe in die Mitte jener beiden Zeiten, also

1. VI. 12^h

fallen wird. Die genaue Zeit der Opposition muß nun durch das uns bereits bekannte Verfahren der Interpolation gesucht werden. Man findet damit:

Zeit der ☍ = 1. VI. 1863. $12^h\ 23^m\ 49^s, 9$ m. Berl. Z.

Die Berliner Zeit kann hierauf leicht in die Zeit irgend eines anderen Orts, dessen Meridiandifferenz von Berlin bekannt ist, verwandelt werden.

Für die eben bestimmte Zeit der ☍ ergiebt sich dann weiter aus dem obigen Schema:

Breite des Monds b		$= + 0^0\,22'\,0'',5$
Mondparallaxe ☾		$= 1^0\,0'\,41'',1$
Sonnenparallaxe ⊙		$= 8'',5$
Mondradius r		$= 16'\,33'',8$
Sonnenradius R		$= 15'\,47'',5$
Stündl. Änderung d.	Mondbreite $\triangle b$	$= + 3'\,26'',1$
" "	Mondlänge $\triangle l$	$= 37'\,10'',8$
" "	Sonnenlänge $\triangle \lambda$	$= 2'\,23'',6$

Diese Werte liefern:

1) $$\operatorname{tg} i = \frac{\triangle b}{\triangle l - \triangle \lambda} = \frac{206,1}{2087,2}$$

Neigung $i = 5^0\,38'\,22''$

2) $$d = b \cos i$$

kürzeste Distanz der Mittelpunkte $= 1314'',1$

3) $$\varrho = \frac{61}{60}(\odot + ☾ - R)$$

Schattenradius $= 45'\,47'',1.$

Da hiernach $d < \varrho$, so ist die Finsternis eine totale.

4) Zeit zwischen Opposition und Mitte der Finsternis

$$= \frac{b \sin^2 i}{\triangle b} = 0{,}0603^h = 3^m\,43^s$$

5) Zeit der Finsternismitte $= 12^h\,23^m\,50^s - 3^m\,43^s$
$= 12^h\,20^m\,7^s$

Da nämlich der Mond sich im aufsteigenden Knoten befindet, so fällt die Mitte der Finsternis (die kleinste Distanz) in eine frühere Zeit als die Opposition.

6) Zeit vom Anfange bis zur Mitte der Finsternis
$= 1^h\,40^m\,12^s.$

Demnach Beginn der Finsternis: $12^h\,20^m\,7^s$
minus $1^h\,40^m\,12^s = 10^h\,39^m\,55^s$

und Ende der Finsternis: $12^h\,20^m\,7^s$
plus $1^h\,40^m\,12^s = 14^h\,0^m\,19^s$

so daß die Gesamtdauer der Finsternis $= 3^h\,20^m\,24^s.$

7) Beginn der totalen (12zolligen) Finsternis: $11^h\ 46^m\ 55^s$,
8) Dauer derselben = $1^h\ 6^m\ 25^s$,
9) Größte Phase = 14,65 Zoll.

Zweites Rechnungsbeispiel (zu Fig. 6).

Elemente der Mondfinsternis vom 27. II. 1858:

1) Zeit der Opposition = $10^h\ 38^m\ 4^s$ mittl. Frankf. Zeit
2) Breite des Monds = $47'\ 53''$
3) $\triangle \lambda = 2'\ 30'', 5$
4) $\triangle b = -3'\ 5''$
5) $\triangle l = 33'\ 49''$
6) ☾ $= 57'\ 48'', 6$
7) ☉ $= 8'', 7$
8) $r = 15'\ 45'', 2$
9) $R = 16'\ 9'', 6$.

Auflösung:

Anfang der Finsternis = $9^h\ 42^m, 4$
Mitte „ „ = $10^h\ 46^m, 4$
Ende „ „ = $11^h\ 50^m, 4$
Größte Phase = 4 Zoll.

Drittes Rechnungsbeispiel*).

Die im 19. Jahre des peloponnesischen Kriegs (27. August 413 v. Chr.) eingetretene, von Thukydides (VII. 50. Kap.**)) erwähnte, für das Schicksal des vor Syrakus lagernden atheniſchen Heeres so verhängnisvolle Mondfinsternis hat folgende Elemente:

Zeit der Opposition = $8^h\ 41^m, 7$ m. Par. Z.
Breite des Monds = $21'\ 58''$
$\triangle b = +3'\ 6'', 2$
$\triangle l = 33'\ 41''$

*) cf. E. Heis, die Finsternisse während des peloponnesischen Kriegs.

**) Καὶ μελλόντων αὐτῶν, ἐπειδὴ ἕτοιμα ἦν, ἀποπλεῖν, ἡ σελήνη ἐκλείπει· ἐτύγχανε γὰρ πανσέληνος οὖσα.

$\triangle \lambda = 2' 28''$
$r = 15' 45''$
$R = 15' 58''$
$\odot = 8'', 6$
$☾ = 57' 41'', 5$
Länge von Syrakus $= 12^0 52'$ östl. v. Paris.

Auflösung.

1) Schattenradius $\varrho = 2512''$
2) $\varrho + r = 3457''$
3) $\varrho - r = 1567''$
4) Anfang der Finsternis $= 7^h 47^m$ mittl. Syrak. Z.
5) Mitte der Finsternis $= 9^h 29^m$
6) Anfang der totalen Finsternis $= 9^h 1^m$
7) Ende der totalen Finsternis $= 9^h 57^m$
8) Ende der Finsternis überhaupt $= 11^h 11^m$
9) Größte Phase $= 13,6$ Zoll.

3. Die Ausbreitung der Mondfinsternis.

Die Mondfinsternis ist in jedem Augenblicke nur für die Bewohner derjenigen Hemisphäre EZF (cf. Fig. 7) sichtbar, welche gerade vom Monde beschienen wird, oder streng genommen nur für die Bewohner der Erdkugelschale EZF, die stets ein wenig kleiner sein wird, als eine Halbkugel. Die Grenzen dieser erleuchteten Hemisphäre verschieben sich ununterbrochen, hauptsächlich infolge der Achsendrehung der Erde, außerdem aber auch, weil Erde und Mond ihre gegenseitige Stellung fortgesetzt ändern. Wäre man nun imstande, die vom Monde

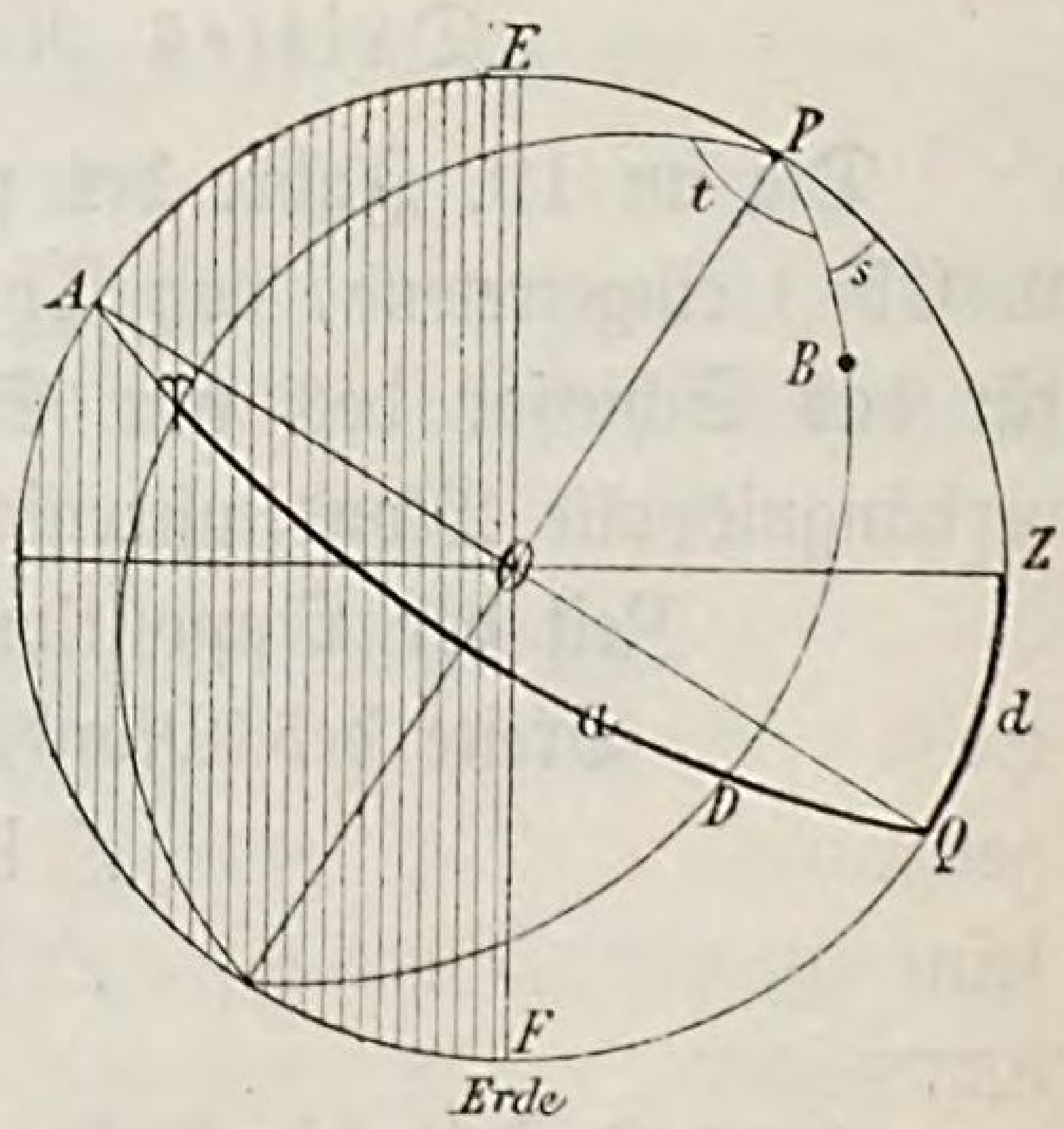


Fig. 7.

beschienene Halbkugel zu Anfang, in der Mitte und am Ende der

Finsternis etwa auf einem Erdglobus zu verzeichnen, dann hätte man damit auch ohne weiteres den Ausbreitungsbezirk der Finsternis in ihren verschiedenen Stadien mit einer wenigstens für die gewöhnlichen Zwecke ausreichenden Genauigkeit. Man erlangte so insbesondere Kenntnis von denjenigen Ländergebieten, welche den gesamten Verlauf der Finsternis, oder nur ihren Anfang, oder nur das Ende sehen. Diejenigen Örter nämlich, welche in allen drei Stellungen des Globus der Lichtseite angehören, nehmen den ganzen Verlauf der Finsternis wahr; diejenigen Örter, welche anfangs zwar in der Lichtseite liegen, später aber auf die Nachtseite treten, sehen nur den Anfang; diejenigen Örter endlich, welche während der Dauer der Verfinsterung von der Nachtseite allmählich auf die Lichtseite übergehen, ist nur das Ende sichtbar.

Es handelt sich also wesentlich darum, die jedesmal dem Monde zugekehrte Hemisphäre zu bestimmen, wobei man sich des folgenden Verfahrens bedienen kann: Man ermittele auf die unten angegebene Art den Erdort Z, in dessen Zenit der Mond gerade steht, stelle hierauf den Erdglobus so, daß dieser Ort in das Zenit des Globushorizonts fällt; alsdann schneidet der (gewöhnlich durch eine hölzerne, ringförmige Scheibe dargestellte) Globushorizont diejenige Hemisphäre ab, für welche der Mond, also auch die Finsternis, in dem betreffenden Zeitmomente sichtbar ist.

Der Ort Z aber, welcher den Mond zu einer gegebenen (etwa Berliner) Zeit im Zenit hat, darf als bekannt betrachtet werden, wenn man für diese Zeit

die Deklination d des Monds

und seinen Stundenwinkel in Bezug auf den Berliner Meridian

weiß. Denn die Deklination d giebt unmittelbar (s. Fig. 7) die geographische Breite des Orts Z an, während der Stundenwinkel s seine Meridiandifferenz in Bezug auf Berlin (in der Figur durch B angedeutet) darstellt. Bestimmt man also für die betreffende Zeit mit Hilfe der astronomischen Tafeln die Monddeklination, dann hat man die Polhöhe des gesuchten Orts; verwandelt man sodann die

gegebene mittlere Zeit nach bekannten Regeln (cf. sphär. Astr., p. 11) in die Sternzeit t und sucht außerdem die zugehörige Mondrektascension a, dann liefert die Gleichung

$$s = t - a$$

den verlangten Stundenwinkel, also auch die Meridiandifferenz. Ergiebt sich für s ein negativer Wert, dann zeigt dies an, daß der Stundenwinkel (die Meridiandifferenz) östlich zu nehmen ist, da die positive Zählrichtung der Stundenwinkel in obiger Gleichung nach Westen angenommen ist.

Dritter Abschnitt.

Theorie der Sonnenfinsternisse.

---

1. Anfang und Ende der verschiedenen Phasen einer Sonnenfinsternis auf der Erdoberfläche.

Geocentrischer Verlauf derselben.

Die Berechnung der Sonnenfinsternisse ist mit weit mehr Schwierigkeiten verbunden als die der Mondfinsternisse wegen ihrer Abhängigkeit vom Standpunkte des Beobachters, welche im allgemeinen für jeden an der Finsternis teilnehmenden Ort der Erdoberfläche einen besonderen Verlauf der Erscheinung zur Folge hat.

Zunächst sei noch einmal daran erinnert, was wir bereits aus Fig. 3 wissen, daß ein Ort im Gebiete des Kernschattens totale, im Gebiete des ringförmigen Schattens annulare, im Gebiete des Halbschattens partiale, und ein Ort in der Richtung der Achse des Mondschattens centrale Finsternis hat.

Die Sonnenfinsternis beginnt auf der Erde in dem Augenblicke, wo der Halbschatten des Monds (s. Fig. 8) die Erdoberfläche zum erstenmal im Punkte T berührt; sie endigt, nachdem der Schatten über die Erde hinweggezogen ist, gleichfalls mit einer Berührung zwischen Halbschatten und Erde. Im vorliegenden Falle haben wir uns also nicht mehr die Ebene des Dreiecks sme, d. h. des Dreiecks

Sonnenmittelpunkt — Mondmittelpunkt — Erdmittelpunkt,

senkrecht zur Ebene der Ekliptik und unter dem Winkel β nicht mehr die geocentrische Breite des Monds zur Zeit der Konjunktion vorzu-

stellen, da diese (bei einer früheren Gelegenheit gemachte) Annahme nur bei Feststellung der Finsternisgrenzen erforderlich ist. Vielmehr muß jetzt, wo wir die Existenz einer Finsternis von längerer Dauer voraussetzen, die Ebene des Dreiecks sme im Momente jener ersten oder letzten Berührung eine schiefe Neigung gegen die Ekliptikebene einnehmen; auch stellt alsdann der Winkel β nicht mehr die geocentrische Breite des Monds, sondern die geocentrische Distanz von Sonnen- und Mondmittelpunkt zur Zeit dieser Berührungen dar.

Während die Sonnenfinsternis überhaupt und die partiale Finsternis insbesondere auf der Erde ihren Anfang nimmt, sobald letztere den Partialschatten, wie in Fig. 8, zum erstenmal berührt — so beginnt die totale Finsternis auf der Erde, wenn dieselbe (s. Fig. 9) den Kernschatten des Monds zum erstenmal streift. Die centrale Finsternis bricht an,

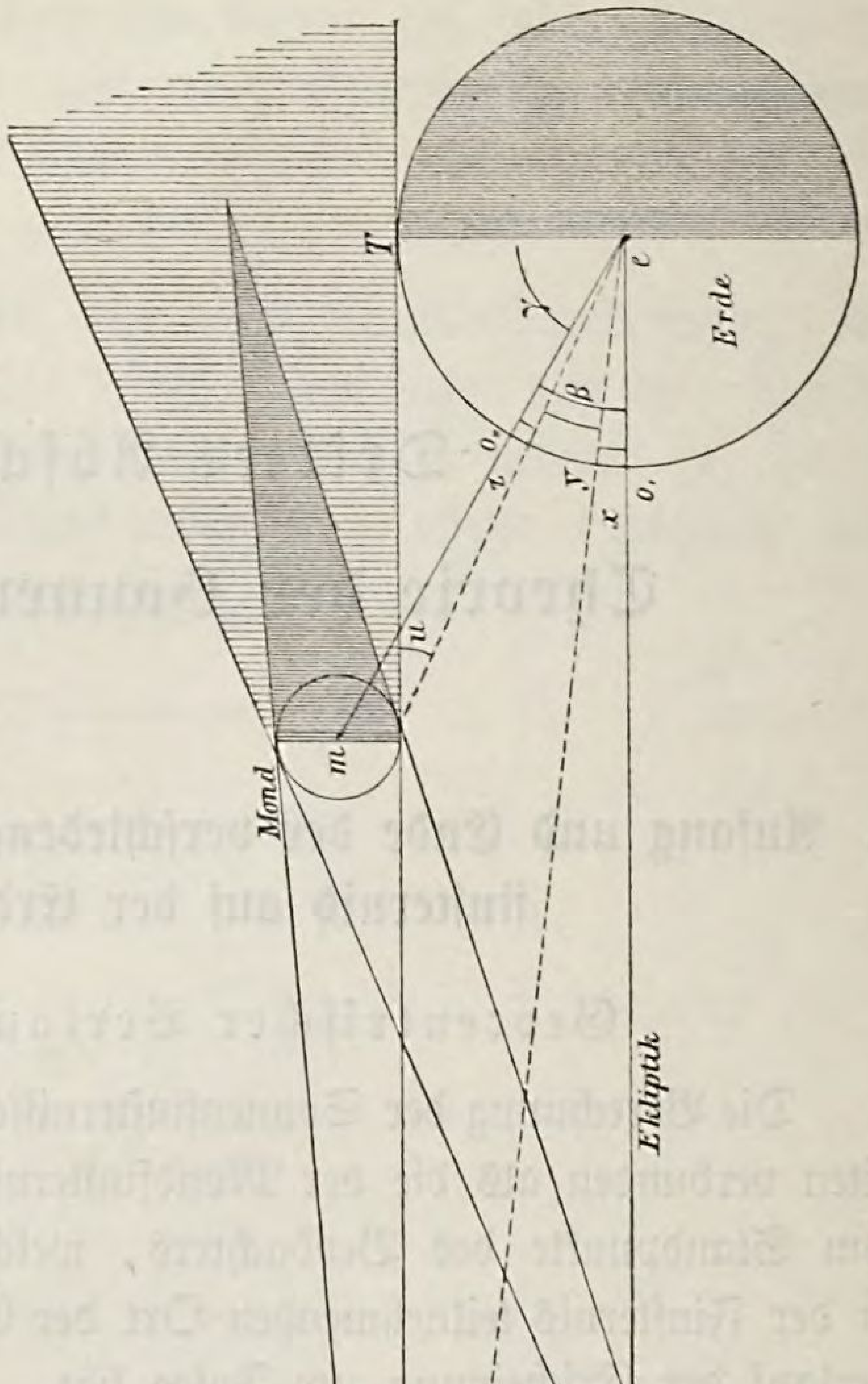


Fig. 8.

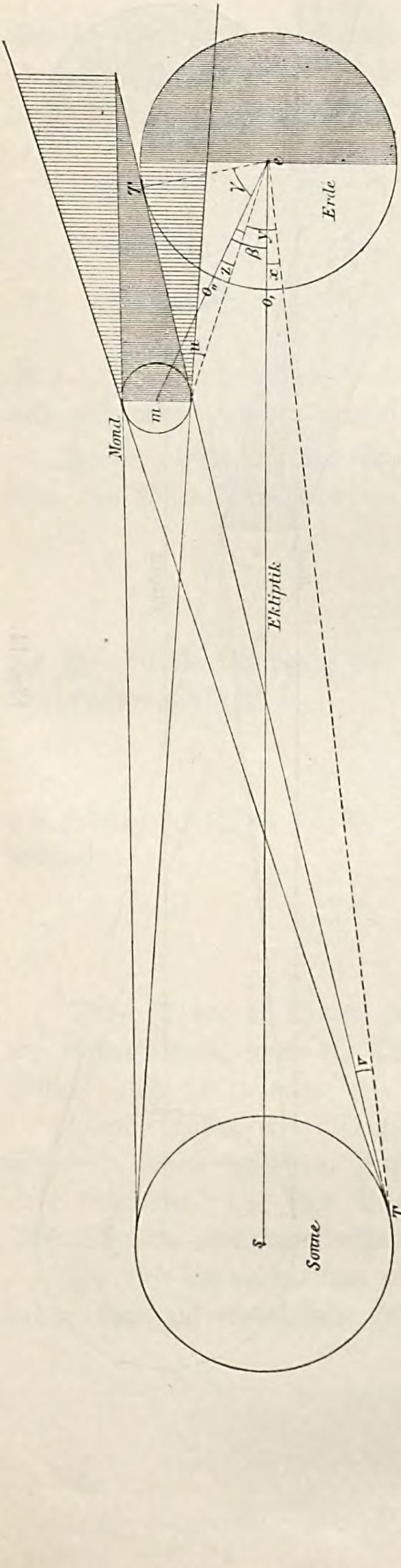

Mond
m
u
T
z
β
y
γ
x
e
Erde
Ekliptik
v
s
Sonne

Fig. 9.

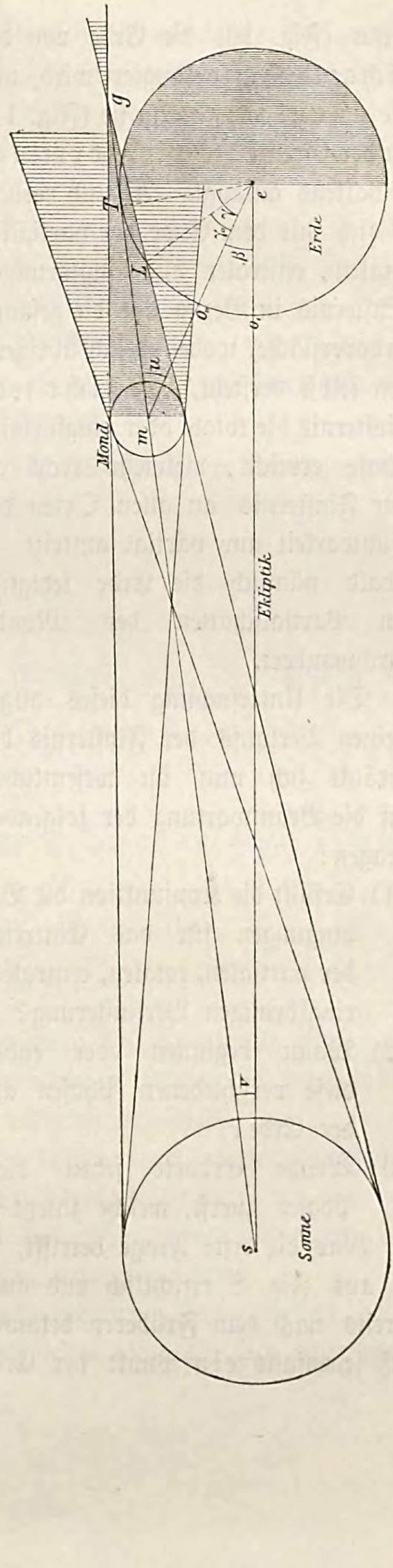

Mond
m
u
T
g
β
γ
e
Erde
Ekliptik
v
s
Sonne

Fig. 10.

wenn (Fig. 10) die Erde von der Schattenachse tangiert wird, und die annulare, wenn sie (Fig. 11) an der Grenze des ringförmigen Schattens anlangt. Ähnlich verhält es sich mit dem Ende der partialen, totalen, centralen und ringförmigen Finsternis in Bezug auf die gesamte Erdoberfläche, wobei es sich übrigens von selbst versteht, daß nicht jede Finsternis die totale oder ringförmige Phase erreicht, vielmehr recht oft eine Finsternis an allen Orten der Sichtbarkeit nur partial auftritt — sobald nämlich die Erde lediglich den Partialschatten des Monds durchwandert.

Die Untersuchung dieses allgemeinen Verlaufs der Finsternis beschränkt sich nun im wesentlichen auf die Beantwortung der folgenden Fragen:

1) Erfüllt die Konjunktion die Bedingungen für das Eintreten der partialen, totalen, centralen, ringförmigen Verfinsterung?
2) Wann beginnen oder enden diese verschiedenen Phasen auf der Erde?
3) Welche Erdorte sehen diese Phasen zuerst, welche zuletzt?

Was die erste Frage betrifft, so ist aus Fig. 8 ersichtlich und auch bereits nach dem Früheren bekannt, daß jedenfalls ein Punkt der Erd-

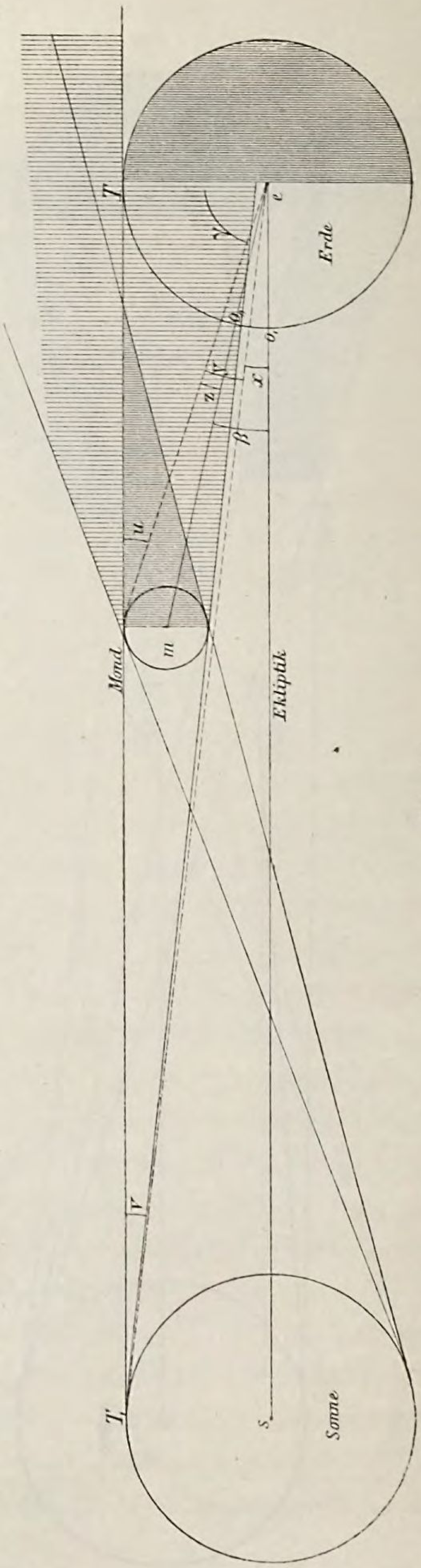


Fig. 11.

oberfläche partiale Finsternis (äußere Randberührung) hat, wenn die geocentrische Distanz β zur Zeit der Konjunktion der Gleichung genügt:

$$\begin{aligned}\beta &= x + y + z \\ &= x + z + u - v \\ &= R + r + ☾ - ⊙ \\ &= \text{Sonnenradius plus Mondradius} \\ &\quad \text{plus Mondparallaxe} \\ &\quad \text{minus Sonnenparallaxe.}\end{aligned}$$

Ist die geocentrische Distanz β kleiner als dies Aggregat, dann erleiden auch noch andere Erdorte partiale Finsternis.

Ferner ergiebt sich aus Figur 9 als Bedingung für das Eintreten, bezw. den Anfang der totalen Finsternis:

$$\begin{aligned}\beta &= y + z - x \\ &= u - v + z - x \\ &= ☾ - ⊙ + r - R,\end{aligned}$$

aus Fig. 10 die Bedingung für das Eintreten, bezw. den Anfang der centralen Finsternis:

$$\begin{aligned}\beta &= u - v \\ &= ☾ - ⊙\end{aligned}$$

und endlich aus Figur 11 die Bedingung der annularen Sonnenfinsternis:

$$\begin{aligned}\beta &= y + x - z \\ &= u - v + x - z \\ &= ☾ - ⊙ + R - r.\end{aligned}$$

Dabei ist von vornherein zu beachten, daß eine totale Finsternis nur eintreten kann, wenn der Sonnenradius R kleiner als der Mondradius r und eine annulare nur im umgekehrten Falle.

Hiermit haben wir also die Voraussetzungen, unter denen die eine oder andere Phase der Finsternis jedenfalls irgendwo auf der Erde stattfindet. Für den Verlauf des Phänomens an einem bestimmten Orte aber kann daraus nichts gefolgert werden.

Ob diese Voraussetzungen in einem gegebenen Falle wirklich statthaben, kann auf mannigfache Art entschieden werden. Am einfachsten

ist es, den **geocentrischen Verlauf** der Sonnenfinsternis genau nach der bei der Mondfinsternis kennengelernten Regeln zu berechnen, indem man nur an Stelle des Erdschattens die Sonnenscheibe setzt. Wie dort, so läßt sich denn auch hier die Zeit der kürzesten oder irgend einer anderen Distanz von Sonnen- und Erdmittelpunkt finden. Bezeichnen wir jetzt und in der Folge die oben durch β angedeutete geocentrische Distanz der beiden konjugierten Gestirne mit δ, dann hätte man also neben der Zeit der kürzesten Distanz insbesondere die Zeitpunkte der Distanzen

$$\delta = ☾ - ☉$$

$$\delta = R + r + ☾ - ☉ \text{ u. s. f.}$$

festzustellen, da diese, gemäß den oben entwickelten Bedingungen, den Augenblicken entsprechen, in welchen die centrale, partiale u. s. f. Finsternis auf der Erde anfängt oder endigt. Ist die kürzeste Distanz größer als

$$☾ - ☉ + r - R,$$

dann ist dies ein Zeichen, daß die Finsternis sich überhaupt nicht bis zur Totalität entwickelt; es fällt dann selbstverständlich die Berechnung der Zeitpunkte der Centralität und Totalität weg.

Übrigens ist die Bestimmung dieser verschiedenen Zeitpunkte als der Hauptzweck der geocentrischen Berechnung der Sonnenfinsternisse zu betrachten. Denn diese verlaufen in irgend einem Punkte der Erdoberfläche, wie bereits früher erwähnt, ganz anders als im Mittelpunkte der Erde. Bei der Mondfinsternis hingegen erhält man im geocentrischen Verlaufe zugleich den Verlauf für die ganze Erde; hier bildet deshalb die Berechnung des geocentrischen Verlaufs den wichtigsten Teil der Untersuchung.

Zuweilen ist es wünschenswert, die geocentrische Distanz δ von Sonnen- und Mondmittelpunkt direkt aus den Koordinaten der beiden Gestirne, also

der Rektascension A der Sonne,
der Deklination D der Sonne,
der Rektascension a des Monds
und der Deklination d des Monds

zu berechnen. Diese Bestimmung ist sehr einfach und ganz analog der

Herleitung der Distanz zweier Erdorte aus ihren geographischen Koordinaten. Man hat nämlich:

$$\cos\delta = \sin D \sin d + \cos D \cos d \cos (A - a) \,.\,.\,, (I),$$

wobei man jedoch einen kleinen Umweg in der Berechnung von δ nicht scheuen darf, wenn dieser Winkel sehr klein und dann seine Ermittelung aus dem Kosinus unsicher wird.

Es ist nun noch der letzte Teil der uns gestellten Aufgabe zu lösen: Welche Erdorte sehen die einzelnen Stadien der Finsternis zuerst und zuletzt? Man hat zur Beantwortung dieser Frage verschiedene Wege in Vorschlag gebracht. Der folgende scheint seiner großen Einfachheit wegen besonders empfehlenswert.

In Figur 8 ist T der Ort, welcher die partiale Finsternis zuerst sieht, dessen geographische Koordinaten also gesucht werden. Dieser Punkt T liegt offenbar auf einem größten Erdkreise $O_, O_{,,} T$, der als Durchschnitt der Ebene des Dreiecks sme, d. h. des Dreiecks

Sonnen-, Mond-, Erdmittelpunkt,

mit der Erdoberfläche erscheint. Die Punkte $O_,$ und $O_{,,}$ sind diejenigen, welche die Sonne, bezw. den Mond bei Beginn der partialen Finsternis im Zenit haben, und da die Zeit dieser Phase aus dem Vorhergehenden bekannt ist, so lassen sich auch die geographischen Koordinaten der Zenitorte nach der früher gegebenen Regel aus den astronomischen Koordinaten der Gestirne berechnen. Wäre nun außerdem noch der Winkel $O_{,,} e T = \gamma$

bestimmt, dann dürfte auch die Lage des Punkts T als bekannt betrachtet werden. Dieselbe ließ sich entweder durch eine leichte Rechnung (s. weiter unten) genau ermitteln oder auch näherungsweise dadurch, daß man auf einem Erdglobus den die bekannten Orte $O_,$ und $O_{,,}$ verbindenden Bogen über $O_{,,}$ (den Zenitort des Monds) hinaus um den Bogen γ verlängerte. Die Größe des Winkels γ läßt sich aber unschwer feststellen. Aus dem bei T rechtwinkligen Dreieck $T_1 T e$ folgt nämlich:

$$\gamma = \sphericalangle T_1 e T - (\beta - x) = 90^0 - v - (\beta - x).$$

Da

$$\beta = \text{geoc. Distanz bei Beginn der partialen Finsternis}$$
$$= \delta = x + z + u - v,$$

ſo wird $\gamma = 90^0 - \mathrm{v} + \mathrm{x} - \mathrm{x} - \mathrm{z} - \mathrm{u} + \mathrm{v}$
$= 90^0 - \mathrm{u} - \mathrm{z}$
$= 90^0 -$ ☾ $- \mathrm{r}$.

Man erhält demnach den Punkt, für welchen die partiale Finſternis zuerſt ſichtbar iſt, indem man den Bogen $O_, O_{,,}$ um das Komplement des Winkels ☾ $+ \mathrm{r} =$ Mondparallaxe $+$ Mondradius verlängert. — Der Winkel γ, welcher dem Erdorte entſpricht, der das Ende der partialen Finſternis, alſo überhaupt das Ende der Finſternis wahrnimmt, iſt durch dieſelbe Gleichung gegeben. Nur haben ſich ſelbſtverſtändlich die Zenitorte von Sonne und Mond inzwiſchen geändert.

In ähnlicher Weiſe findet man für den Anfang oder das Ende

der totalen Finſternis (Fig. 9):

$\gamma = 90^0 - \mathrm{r} -$ ☾,

der centralen Finſternis (Fig. 10):

$\gamma = 90^0 -$ ☾,

der annularen Finſternis (Fig. 11):

$\gamma = 90^0 -$ ☾ $+ \mathrm{r}$.

Damit haben wir die Lagen derjenigen Erdörter, in welchen der Anfang oder Schluß der Finſternisphaſen wahrgenommen wird. Wünſcht man dabei den Gebrauch des Erdglobus zu vermeiden, dann führt folgende einfache Rechnung zur Beſtimmung der geographiſchen Koordinaten der betreffenden Örter.

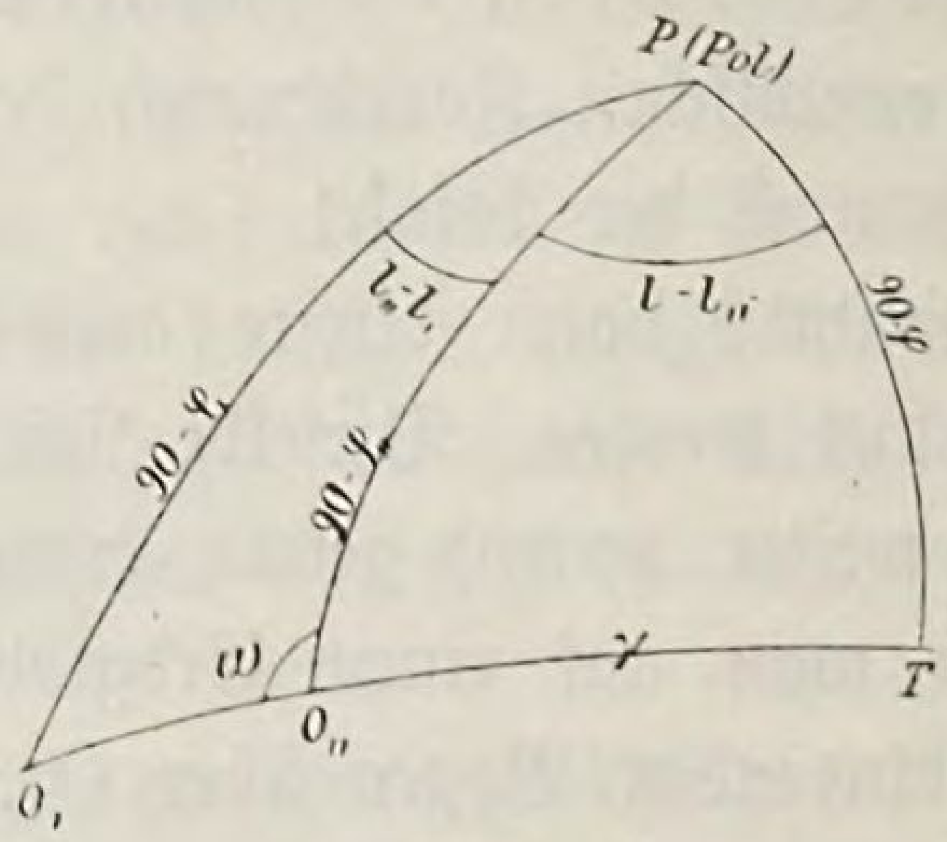


Fig. 12.

Man bezeichne die bekannten geographiſchen Breiten der Erdörter $O_,$ und $O_{,,}$ (Fig. 12)

durch $\varphi_,$ und $\varphi_{,,}$,

ihre geographiſchen Längen

durch $\mathrm{l}_,$ und $\mathrm{l}_{,,}$,

und beſtimme aus dem $\triangle\ P O_, O_{,,}$ zunächſt den Winkel ω. Die geſuchten geographiſchen Koordinaten φ, l des Orts T ergeben ſich alsdann aus den Gleichungen:

1. $\cos(90^0 - \varphi) = \cos(90^0 - \varphi_{,,}) \cos\gamma + \sin(90^0 - \varphi_{,,}) \sin\gamma \cos(180 - \omega)$

2. $\cos(\mathrm{l} - \mathrm{l}_{,,}) = \dfrac{\cos\gamma - \sin\varphi_{,,} \sin\varphi}{\cos\varphi_{,,} \cos\varphi}$

Rechnungsbeispiel:

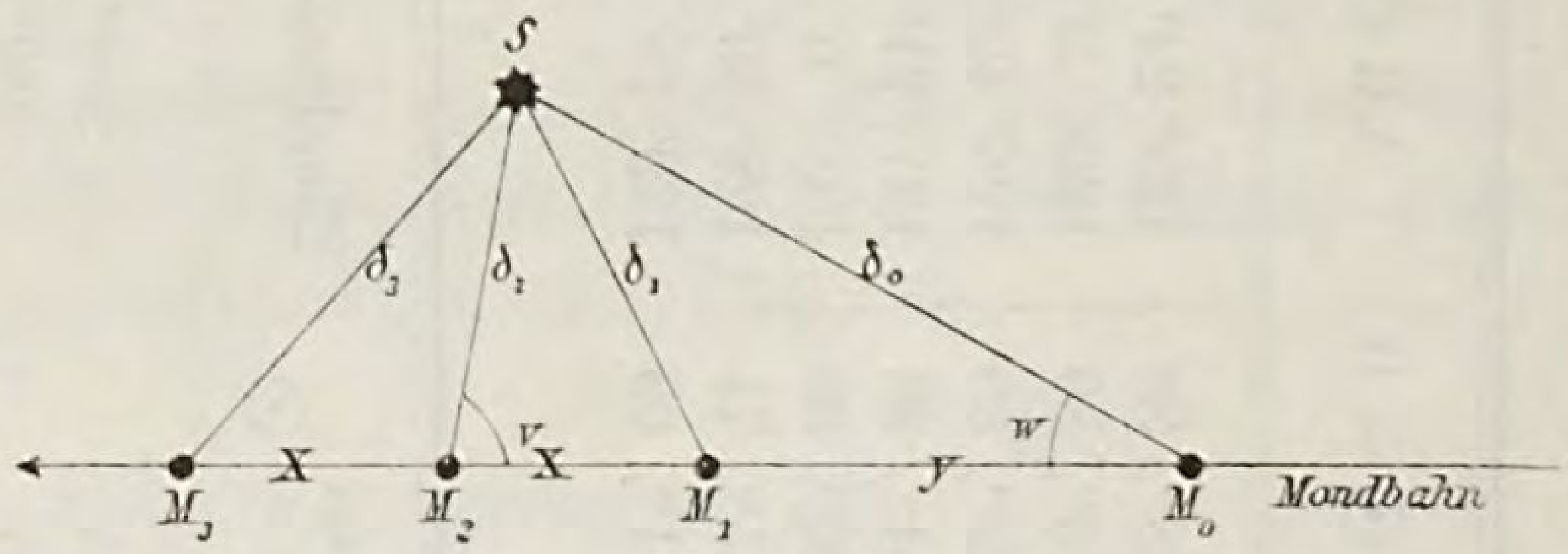
Totale Sonnenfinsternis am 28. Juli 1851.

Nach dem Nautical Almanac ist:

Wahre Zeit in Greenwich	Zeitgleichung	AR ☉ = A	Deklination ☉ = D	AR ☾ = a	Deklination ☾ = d
1851.VII.27. 23ʰ 30ᵐ	+ 6ᵐ 11ˢ, 07	127° 5′ 6″, 74	+ 19° 5′ 38″, 36	125° 24′ 36″, 62	+ 20° 5′ 34″, 87
28. 0ʰ 30ᵐ	6 11, 04	127° 7′ 34″, 06	19° 5′ 3″, 89	126° 3′ 39″, 77	20° 0′ 17″, 74
1ʰ 30ᵐ	6 11, 01	127° 10′ 1″, 38	19° 4′ 29″, 39	126° 42′ 41″, 64	19° 54′ 51″, 82
2ʰ 30ᵐ	6 10, 98	127° 12′ 28″, 70	19° 3′ 54″, 86	127° 21′ 42″, 15	19° 49′ 17″, 17
3ʰ 30ᵐ	6 10, 95	127° 14′ 56″, 02	19° 3′ 20″, 30	128° 0′ 41″, 22	19° 43′ 33″, 85
4ʰ 30ᵐ	6 10, 91	127° 17′ 23″, 34	19° 2′ 45″, 71	128° 39′ 38″, 77	19° 37′ 41″, 92
5ʰ 30ᵐ	6 10, 87	127° 19′ 50″, 66	19° 2′ 11″, 09	129° 18′ 34″, 72	19° 31′ 41″, 44

Wahre Zeit in Greenwich	Deklination ☉ = D	Sonnenradius = R	Parallaxe der Sonne = ☉	Mondradius = r	Mondparall. = ☾
28. 1ʰ 0ᵐ	+ 19° 4′ 46″, 64	946″, 50	8″, 45	988″, 84	3628″, 81
2ʰ 0ᵐ	19° 4′ 12″, 13	946″, 50	8″, 45	989″, 13	3629″, 90
3ʰ 0ᵐ	19° 3′ 37″, 59	946″, 50	8″, 45	989″, 41	3630″, 97
4ʰ 0ᵐ	19° 3′ 3″, 01	946″, 50	8″, 45	989″, 68	3632″, 02
5ʰ 0ᵐ	19° 2′ 28″, 40	946″, 50	8″, 45	989″, 94	3633″, 05

Um zunächst die Zeiten der Phasen der Finsternis auf der Erde zu bestimmen, könnte man den oben angedeuteten Weg einschlagen und die geocentrische Finsternis nach den bei Untersuchung einer Mondfinsternis angewendeten Grundsätzen berechnen. Wir ziehen es jedoch vor, die Rechnung nach einem etwas anderen Verfahren durchzuführen, bei dem die Bestimmung der Neigung der Mondbahn entbehrlich wird. Vorausgesetzt wird auch hier, daß der Mond während der Dauer der Finsternis seine geradlinige Bahn gleichförmig durchwandert.



Figur 13.

In Fig. 13 sei S der Sonnenmittelpunkt, $M_0 M_3$ die Mondbahn. Berechnet man nach Gleichung (I) für drei in der Nähe der Konjunktion liegende und durch gleiche Zeiten getrennte Momente die geocentrischen Distanzen

$$\delta_1,\ \delta_2 \text{ und } \delta_3$$

zwischen Sonnen- und Mond-Mittelpunkt, dann lassen sich auch die während den gleichen Zeiten vom Mondmittelpunkt zurückgelegten Strecken

$$M_1 M_2 \text{ und } M_2 M_3$$

als gleich betrachten, so daß man nach einem bekannten Satze hat:

$$(M_1 M_2)^2 = x^2 = \frac{\delta_1{}^2}{2} + \frac{\delta_3{}^2}{2} - \delta_2{}^2.$$

Liegen nun die drei Distanzen je um eine Stunde auseinander, dann stellt x

die stündliche Bewegung des Monds

in seiner Bahn dar.

Aus dem jetzt vollständig bekannten $\triangle\ M_1 S M_2$ erzielt sich sodann

$$\sphericalangle\ v$$

und hierauf aus dem $\triangle\ M_0 S M_2$ die Zeit jeder anderen gegebenen Distanz δ_0.

Denn nach Berechnung der Strecke

$$x + y$$

liefert das Verhältnis $\frac{x+y}{x}$ unmittelbar die Anzahl der Stunden, um welche die Distanz δ_0 früher oder später eintritt als die Distanz δ_2.

Nach diesem Verfahren findet man aus den Elementen der obigen Sonnenfinsternis:

$$\text{Distanz um } 1^h\,30^m = \delta_1 = 3395''$$
$$\text{Distanz um } 2^h\,30^m = \delta_2 = 2272''$$
$$\text{Distanz um } 3^h\,30^m = \delta_3 = 3540'',$$

hierauf

$$\text{stündliche Mondbewegung } x = 2084'' \qquad \text{und}$$
$$\measuredangle\, v = 87^0\,30'\,46'', 6.$$

Bei Beginn der Finsternis ist nach dem Früheren die geocentrische Distanz

$$\delta_0 = R + r + ☾ - \pi$$
$$= 5556''.$$

Um nun die Zeit dieser Distanz zu bestimmen, bedarf es weiter der Strecke $x + y$. Man findet dieselbe

$$= 4937'' \text{ und}$$

im Verhältnisse $\frac{4937}{2084} = 2,3689$ erhält man dieselbe Strecke in Zeit (Stunden) ausgedrückt. Da

$$2,3689 = 2^h\,22^m, 2,$$

so nimmt also die Finsternis um

$$2^h\,30^m - 2^h\,22^m, 2 = 0^h\,7^m, 8 \text{ w. Gr. Z.}$$

ihren **Anfang**.

Die Mitte der geocentrischen Finsternis (kleinste Distanz δ) ist von dem Punkte M_2, in welchem der Mond um $2^h\,30^m$ steht, offenbar (s. Fig. 13) um die Strecke

$$\delta_2 \cos v_2 = 120''$$

entfernt. Verwandelt man diese Strecke in Zeit, so ergiebt sich

$$\frac{120}{2084} = 0{,}058^h,$$

so daß die Mitte der Finsternis um

$$2^h\,30^m - 3^m, 5 = 2^h\,26^m, 5 \text{ w. Gr. Z.}$$

eintritt. Vom Anfange der Finsternis auf der Erde bis zu deren Mitte verfließen demnach

$$2^h\,26^m,5 - 0^h\,7^m,8 = 2^h\,18^m,7.$$

Ebenso groß ist der Zeitraum von der Mitte bis zum **Schlusse**, der mithin in

$$2^h\,26^m,5 + 2^h\,18^m,7 = 4^h\,45^m,2$$

fällt.

Auf gleiche Art bestimmt man nun die Zeit der Distanz

$$\delta = ☾ - \odot = 3621'',$$

d. h. die Zeit des Anfangs der centralen Finsternis. Man erhält dafür

$$1^h\,19^m,3 \text{ w. Gr. Z.}$$

und nächstdem für die Zeit des Schlusses der centralen Finsternis

$$3^h\,33^m,7 \text{ w. Gr. Z.}$$

Von Wichtigkeit ist endlich noch die Zeit der Äquatorial-Konjunktion, d. h. der Moment, in welchem die Rektascensionen von Sonne und Mond gleiche Größe besitzen, beide Gestirne also in demselben Meridiane stehen. Ein Punkt des entsprechenden Erdmeridians sieht alsdann die centrale Finsternis im wahren Mittage. — Der fragliche Zeitpunkt ist bereits bei einer früheren Gelegenheit (vgl. theor. Astr., p. 179) ermittelt worden; er ist

$$2^h\,14^m,9 \text{ w. Gr. Z.} = 32^0\,42',8.$$

Da der Erdort wahren Mittag hat, so ist dies zugleich dessen westliche Länge von Greenwich. Seine geographische Breite werden wir weiter unten bestimmen.

Zunächst liegt es uns ob, die geographischen Koordinaten der Erdorte zu suchen, welche den Anfang und das Ende der partialen und centralen Finsternis wahrnehmen, wobei wir uns des oben auseinandergesetzten Verfahrens bedienen. Wir haben hiernach — wenn wir mit Bestimmung des Orts T (Fig. 8), in welchem die Finsternis überhaupt beginnt, den Anfang machen — vor allem die geographische Lage der Zenitorte $O_,$ und $O_{,,}$ festzustellen. Die Polhöhe von $O_,$ ist aber nichts anderes als die Deklination der Sonne bei Anfang der Finsternis, also

$$\text{um } 0^h\,7^m,8 \text{ w. Gr. Z.},$$

wofür man aus den oben mitgeteilten Elementen der Finsternis erhält (vgl. auch Fig. 12):

$$\varphi_{,} = D = 19^0\ 5'\ 17''.$$

Die Polhöhe von $O_{,,}$ fällt zusammen mit der Deklination des Monds um $0^h\ 7^m,8$, so daß man hat:

$$\varphi_{,,} = d = 20^0\ 2'\ 15''.$$

Der Stundenwinkel der Sonne in Bezug auf den Meridian von Greenwich ist

$$= 0^h\ 7^m,8 = 1^0\ 57'.$$

Was den Stundenwinkel des Monds um $0^h\ 7^m,8$ betrifft, so ergiebt sich derselbe mit Zuziehung der Gleichung:

Stundenwinkel = Sternzeit minus AR ☾.

Die Sternzeit im wahren Mittage von Greenwich ist gleich der Rektascension der Sonne im wahren Mittage (da alsdann s = o), mithin

$$= 127^0\ 6'\ 20''.$$

Addiert man zu derselben

$0^h\ 7^m,8$ w. Z. $= 1^0\ 57'\ 18''$ Sternz.,

dann folgt:

Sternzeit um $0^h\ 7^m,8 = 129^0\ 3'\ 38''$.

Da ferner

AR ☾ um $0^h\ 7^m,8 = 125^0\ 49'\ 13''$,

so wird

Stundenwinkel des ☾ um $0^h\ 7^m,8 = 3^0\ 14'\ 25''$.

In den Stundenwinkeln von ⊙ und ☾ hat man zugleich (da beide hier positiv) die westlichen Längen der Örter $O_{,}$ und $O_{,,}$ in Bezug auf Greenwich, während ihre Differenz den Winkel (s. Fig. 12)

$$l_{,,} - l_{,}$$

liefert.

Für den Bogen

$$O_{,,}T = \gamma$$

findet man endlich

$$90^0 - ☾ - r = 88^0\ 43',1.$$

Damit haben wir alle Data zur Berechnung der geographischen Koordinaten φ, l des gesuchten Orts T.

Aus dem $\triangle\ O, O_{,,} P$, das durch 2 Seiten und ihren Zwischenwinkel bekannt ist, wird nämlich gefunden:

$$180 - \omega = 52^0\ 13', 5,$$

sodann aus dem $\triangle\ O_{,,} P T$, in dem jetzt gleichfalls 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel bestimmt sind:

$$\varphi = 35^0, 7$$
$$l - l_{,,} = 103^0, 4.$$

Da $l_{,,}$ = Stundenwinkel des Monds $= 3^0, 24$, so hat man:

$l = 106^0, 6$ westl. Länge von Greenwich
$= 253^0,4$ östl. " " " .

Fassen wir die Resultate zusammen, so ist demnach die geographische Breite des Orts, in welchem die gesamte Finsternis mit äußerer Randberührung beginnt;

$$\varphi = 35^0, 7$$

und dessen geographische Länge

$l = 253^0, 4$ östl. v. Gr.

Da mit den vorstehenden Rechnungen lediglich eine Anschauung von dem Totalverlaufe der Finsternis gewonnen werden soll, so ist bei ihrer Ausführung die Anwendung äußerster Genauigkeit nicht gerade erforderlich. Es wird insbesondere der Gebrauch fünfstelliger Logarithmen vollständig genügen; auch ist die Berücksichtigung der zweiten Differenzen der Koordinaten entbehrlich.

In betreff der Lage derjenigen Örter, welche den Anfang der centralen Finsternis, ihren Schluß u. s. w. wahrnehmen, beschränken wir uns — da ihre Berechnung nach den früheren Erläuterungen keinerlei Schwierigkeiten unterliegt — auf eine bloße Mitteilung der Resultate (cf. Sawitsch, prakt. Astr., II, p. 210):

Anfang der centralen Finsternis in
$222^0, 4$ östl. L. v. Gr.
$53^0, 4$ nördl. Breite.

Ende der centralen Finsternis in
$52^0, 7$ ö. L. v. Gr.
$38^0, 8$ n. Br.

Ende auf der Erde überhaupt in

26°, 1 ö. L.

20°, 3 n. Br.

Centrale Finsternis im wahren Mittage in

326° 17′, 2 ö. L.

69°, 7 n. Br.

Die geographische Breite des zuletzt erwähnten Orts, dessen Länge bereits im vorhergehenden gefunden wurde, wird später im Zusammenhange mit der Kurve der Centralität bestimmt werden.

Die Fundamentalgleichungen der Hauptrechnung.

Hiermit ist die Berechnung des allgemeinen Verlaufs der Finsternis beendet, und wir gelangen nunmehr zu der Aufgabe — welche bei weitem den umfassendsten Teil der Untersuchung bildet — die Erscheinung für einen bestimmten Ort der Erdoberfläche (ihren lokalen Verlauf) sowie die Grenzen der Sichtbarkeit ihrer Hauptphasen (Centralität, Totalität, Partialität) auf der Erdoberfläche zu bestimmen. Während die bisherige Betrachtung sich wesentlich an den geocentrischen, von der Parallaxe unabhängigen Verlauf anschloß, so wird im folgenden die geographische Lage des Standpunkts, d. h. die Parallaxe, einen Faktor von entscheidender Bedeutung bilden. Wir dürfen deshalb erwarten, daß bei Beurteilung dieser vorwiegend parallaktischen Erscheinungen die in der sphärischen Astronomie (p. 61 u. ff.) entwickelten allgemeinen Parallaxengleichungen eine wichtige Verwendung finden werden. In der That werden uns dieselben als Grundlage der gesamten weiteren Untersuchung dienen. Diese Gleichungen lauten in der für den gegenwärtigen Zweck specialisierten Form (s. Fig. 14):

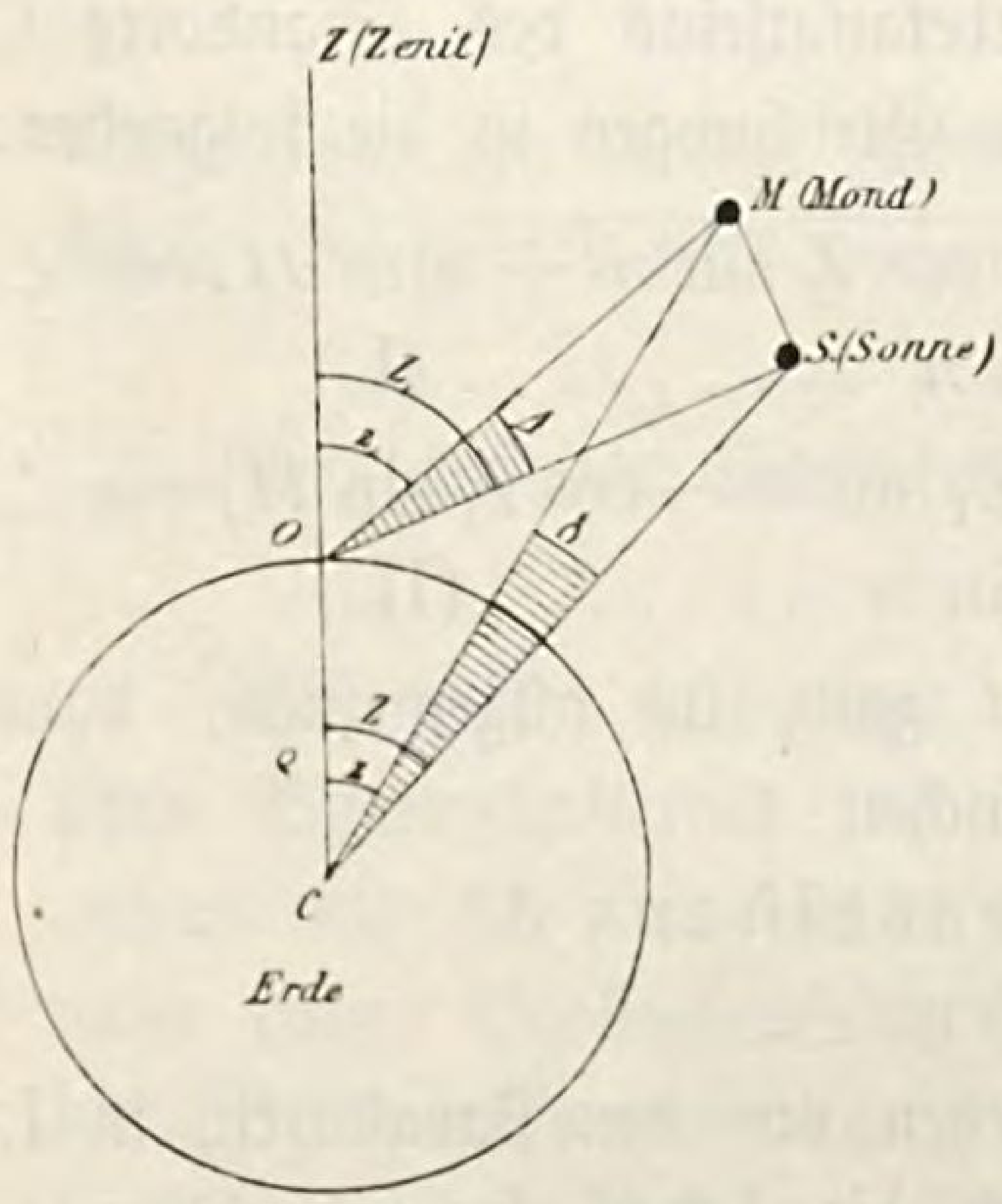


Fig. 14.

$$\cos\delta = \sqrt{1 - 2\varrho\cos z\sin\Pi + \varrho^2\sin^2\Pi}\,(1 - \varrho\cos Z\sin\pi)\cos\triangle$$
$$+\varrho\cos Z\sin\Pi + \varrho\cos z\sin\pi - \varrho^2\sin\Pi\sin\pi\;\ldots\ldots\ldots(\mathrm{I})$$

$$\cos\delta = \{\sqrt{1 - \varrho^2\sin^2 z_1\sin^2\Pi} - \varrho\cos Z_1\sin\pi - \varrho\cos z_1\sin\Pi$$
$$+\varrho^2\cos z_1\cos Z_1\sin\pi\sin\Pi\}\cos\triangle + \varrho\cos Z_1\sin\Pi$$
$$+\varrho\cos z_1\sin\pi + \varrho^2(1 - \cos^2 Z_1 - \cos^2 z_1)\sin\pi\sin\Pi\,..(\mathrm{II}),$$

wenn

δ den geocentrischen (wahren) Abstand von Mond und Sonne,

$\triangle$ den vom Orte aus beobachteten (scheinbaren) Abstand dieser Gestirne,

Z die wahre Zenitdistanz der Sonne,

Z_1 die scheinbare Zenitdistanz der Sonne,

z die wahre Zenitdistanz des Monds,

z_1 die scheinbare Zenitdistanz des Monds,

ϱ den Erdhalbmesser des Beobachtungsorts O,

Π die Äquatorial-Horizontalparallaxe des Monds,

π die Äquatorial-Horizontalparallaxe der Sonne

bezeichnet.

Vernachlässigt man in diesen Gleichungen auch noch die Glieder, welche das Produkt $\sin\Pi\sin\pi$ als Faktor enthalten, und betrachtet die Erde als eine Kugel (indem man $\varrho = 1$ setzt), was in der Mehrzahl der Fälle wegen vorläufigen Unbekanntseins des Standorts O notwendig ist, dann verwandeln sich die Gleichungen in die folgenden:

$$\cos\delta = \sqrt{1 - 2\cos z\sin\Pi - 2\cos Z\sin\pi + \sin^2\Pi}\,.\cos\triangle$$
$$+\cos Z\sin\Pi + \cos z\sin\pi\;\ldots\ldots\ldots(\mathrm{I}_\alpha)$$

$$\cos\delta = \{\sqrt{1 - \sin^2 z_1\sin^2\Pi} - \cos Z_1\sin\pi - \cos z_1\sin\Pi\}\cos\triangle$$
$$+\cos Z_1\sin\Pi + \cos z_1\sin\pi\;\ldots\ldots(\mathrm{II}_\alpha)$$

Betrachtet man diese Gleichungen ganz im allgemeinen, dann stellen dieselben eine Beziehung dar zwischen

der wahren Gestirnsdistanz δ

und der scheinbaren $\triangle$.

Vermittelt wird diese Beziehung, abgesehen von den Parallaxen, in I_α durch die wahren und in I_β durch die scheinbaren Zenitdistanzen der Gestirne, von denen die ersten selbst wieder mit den geographischen Koordinaten des Orts O,

nämlich der Polhöhe φ
und der Sternzeit t desselben,

durch die Relationen verbunden sind (vgl. sphär. Astr., p. 13, Glchg. 3):

$$\cos Z = \sin D \sin \varphi + \cos D \cos \varphi \cos (t - A) \; \ldots\ldots \; (III)$$

$$\cos z = \sin d \sin \varphi + \cos d \cos \varphi \cos (t - a) \; \ldots\ldots \; (IV),$$

wenn, wie früher:

D und A die wahre Deklination und Rektascension der Sonne,

d und a die wahre Deklination und Rektascension des Monds bedeuten, während die wahren und scheinbaren Zenitdistanzen durch die Gleichungen:

$$\sin (Z_1 - Z) = \sin \pi \sin Z_1 \; \ldots\ldots \; (V)$$

$$\sin (z_1 - z) = \sin \Pi \sin z_1 \; \ldots\ldots \; (VI)$$

voneinander abhängen (vgl. sphär. Astr., p. 58, wobei jedoch die verschiedene Bedeutung der Buchstaben zu beachten ist).

Die geocentrischen Größen

$$D, A, d, a, \delta$$

sind als gegeben zu betrachten, sobald — was der regelmäßige Fall ist — die Zeit des Meridians bestimmt ist, für welchen die Tafeln eingerichtet sind. Denn alsdann lassen sich die Koordinaten

$$D, A, d, a$$

unmittelbar den Tafeln entnehmen und die Distanz δ auf verschiedene Weise, wie wir bereits wissen, aus ihnen berechnen.

2. Verlauf der Sonnenfinsternis für einen bestimmten Ort der Erde.

Wie schon wiederholt erwähnt, gestaltet sich die Erscheinung einer Sonnenfinsternis für einen Ort der Erdoberfläche wesentlich anders als für den Mittelpunkt der Erde. So erscheinen beispielsweise einem Beobachter im Punkte O (s. Fig. 15) der Erdoberfläche die Mittelpunkte des Monds M und der Sonne S in derselben Visierlinie OP; ihre scheinbare Distanz $\triangle$ ist also Null und der Punkt O hat centrale Finsternis. Vom Mittelpunkte C der Erde aus wird hingegen die Sonne im Punkte P', der Mond im Punkte P'' der Himmels-

sphäre wahrgenommen; ihre geocentrische Distanz ist von Null verschieden und gleich δ.

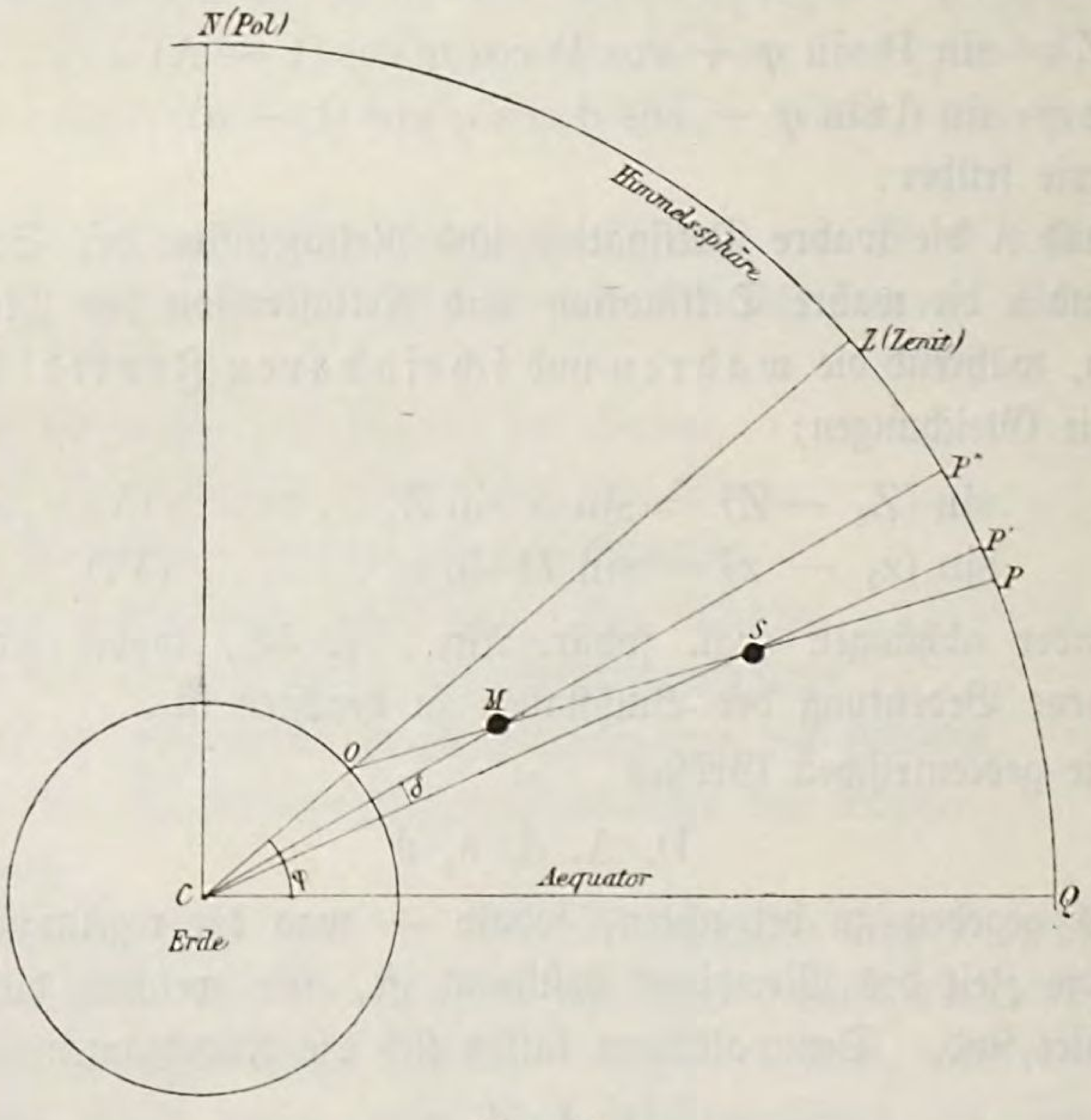


Fig. 15.

Doch läßt sich mit Hilfe der obigen Fundamentalgleichungen der lokale Verlauf für O leicht berechnen. Es kommt dabei lediglich darauf an, für beliebige Momente innerhalb der aus dem vorigen Abschnitte bekannten Finsternisdauer die einem Beobachter in O erscheinenden Distanzen, welche oben mit $\triangle$ bezeichnet worden sind, zu ermitteln, insbesondere festzustellen, wann $\triangle = R + r$, und wann $\triangle$ seinen kleinsten Wert erreicht — da diese Zeitpunkte den Anfang und das Ende sowie die Mitte der Finsternis bezeichnen.

Man kann dabei das gleiche Verfahren anwenden, wie oben bei Untersuchung des geocentrischen Verlaufs (s. Fig. 13); nur, daß diesmal an Stelle der geocentrischen Distanzen

$$\delta_1, \ \delta_2, \ \delta_3$$

drei durch gleiche Zeitintervalle getrennte scheinbare Abstände

$$\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3$$

zu bestimmen sind, was in folgender Weise geschieht.

Nachdem man für drei willkürliche, je um eine Stunde getrennte und im Bereiche der Finsternisdauer liegende Zeitpunkte die Koordinaten

$$A, D, a, d$$

aus den Tafeln genommen und die drei zugehörigen δ mit Hilfe der Gleichung

$$\cos \delta = \sin D \sin d + \cos D \cos d \cos (A - a)$$

berechnet hat, erhält man aus den Gleichungen (III) und (IV) die entsprechenden wahren Zenitdistanzen Z und z. Denn da die geographische Breite φ sowie die geographische Länge des Orts O in Bezug auf den Null-Meridian, mithin auch die jenen drei Zeitpunkten entsprechenden Sternzeiten des Orts bekannt sind, so enthalten die rechten Seiten der Gleichungen lauter gegebene oder bestimmbare Größen. — Nach Ermittelung der Werte von

$$\delta, Z, z$$

liefert aber die Gleichung (I_α) unter Zuziehung der Parallaxen

$$\Pi, \pi$$

unmittelbar die gesuchten scheinbaren Distanzen $\triangle$.

Rechnungsbeispiel.

Man sucht den Verlauf der Sonnenfinsternis vom 28. VII. 1851 (s. p. 33) für Königsberg, dessen geographische Breite (vgl. Ortstafel der „Nachträge")

$$\varphi = 54^0\ 42'\ 51''$$

und dessen geographische Länge

$$l = 20^0\ 30'\ 7'' \text{ östl. v. Greenw.}$$

Auflösung.

Nach dem Obigen war

um $1^h\ 30^m$ m. Z. Gr.: $\delta_1 = 3395''$

$2^h\ 30^m$: $\delta_2 = 2772''$

$3^h\ 30^m$: $\delta_3 = 3540''$

Ferner hat man für dieselben Zeiten aus dem obigen Täfelchen die Koordinaten

A, D der Sonne und

a, d des Monds,

so daß, um mittels der Gleichungen (III) und (IV) die Zenitdistanzen

Z, z

berechnen zu können, nur noch die den wahren Greenwicher Zeiten entsprechenden Sternzeiten t von Königsberg gesucht werden müssen.

Da die Zeitgleichung (s. d. Täfelchen) hier stets zu

$6^m\ 11^s$

angenommen werden darf, so wird man überall

1 Stunde wahre Zeit = 1 Stunde mittl. Zeit

setzen können. Es ist nun aber:

Rektascension der Sonne im wahren Mittage von Greenwich

$= 127^0\ 6'\ 20'', 4$ = Sternzeit im wahren Mittage von Greenwich,

ferner:

1 St. 30 Min. wahre (oder auch mittlere) Zeit

= 1 St. 30 M. 14,78 Sek. Sternzeit

$= 22^0\ 33'\ 42''$ Sternzeit.

Mithin Sternzeit in Greenwich um $1^h\ 30^m$ w. Z.

$= 127^0\ 6'\ 20'' + 22^0\ 33'\ 42''$

$= 149^0\ 40'\ 2''$,

und Sternzeit in Königsberg

$= 149^0\ 40'\ 2'' + 20^0\ 30'\ 7''$

$= 170^0\ 10'\ 9''$.

Also ist

Stundenwinkel der ☉ in Bezug auf den Meridian von Königsberg

$= t - A = 170^0\ 10'\ 9'' - 127^0\ 10'\ 1''$

$= 43^0\ \ 0'\ 8''$

und Stundenwinkel des Monds

$= t - a = 43^0\ 27'\ 27''$.

Auf demselben Wege werden die Stundenwinkel für $2^h\ 30^m$ und $3^h\ 30^m$ w. Z. v. Gr. berechnet.

Man erhält so, indem man nacheinander die Gleichungen (III), (IV) und (I_α) anwendet, in welcher letzteren

die Mondparallaxe $\Pi = 3630''$ und
die Sonnenparallaxe $\pi = 8'',45$
gesetzt werden kann, das folgende Schema:

$1^h\ 30^m$ w. Z. v. Gr.	$2^h\ 30^m$	$3^h\ 30^m$
$t - A = 43^0\ 0'\ 8''$	$t - A = 58^0\ 0'\ 8''$	$t - A = 73^0\ 0'\ 8''$
$t - a = 43^0 27' 27''$	$t - a = 57^0 50' 55''$	$t - a = 72^0 14' 24''$
$\log\cos Z = 9{,}8234887$	$\log\cos Z = 9{,}7450245$	$\log\cos Z = 9{,}6295313$
$\log\cos z = 9{,}8275474$	$\log\cos z = 9{,}7528044$	$\log\cos z = 9{,}6448093$
	$\log\sin \Pi = 8{,}2454591$	
	$\log\sin \pi = 5{,}6124316$	
$\delta_1 = 3395''$	$\delta_2 = 2772''$	$\delta_3 = 3540''$
$\triangle_1 = 3095''$	$\triangle_2 = 1305''$	$\triangle_3 = 670''$

Hieraus ergiebt sich (vgl. Fig. 13, worin statt der wahren Größen δ_1, δ_2, δ_3 die scheinbaren $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ zu substituieren sind):
Stündlicher Weg des Monds in der scheinbaren Königsberger Bahn

$$= x = \frac{\triangle_1^2}{2} + \frac{\triangle_3^2}{2} - \triangle_2^2 = 1819''$$

sodann (ganz wie bei der geocentrischen Rechnung)

Zeit der kleinsten Distanz = Zeit der Finsternismitte
$= 2^h\ 30^m + 41^m,4$ w. Z. v. Gr.
$= 3^h\ 11^m,4$ w. Z. v. Gr.
$= 4^h\ 33^m,4$ w. Z. v. Königsberg.

Für den Anfang der Finsternis in Königsberg findet sich:

$3^h\ 30^m$ w. Kön. Z.

und für das Ende:

$5^h\ 32^m$ w. Kön. Z.

Übrigens mag bemerkt werden, daß das vorstehende Beispiel nur zur Erläuterung des Verfahrens dienen soll. Wird besondere Genauigkeit verlangt, dann müßte namentlich noch auf die Gestalt der Erde und die Parallaxe des Mondhalbmessers Rücksicht genommen werden. In diesem Falle wäre in den Gleichungen III und IV für φ nicht

die geographische sondern die geocentrische Breite von Königsberg zu nehmen, also (vgl. Tafel III der „Nachträge"):

$$\varphi \text{ (oder eigentlich } \varphi_1) = 54^0\,42'\,51'' + 10'\,52''$$
$$= 54^0\,53'\,43''$$

zu setzen. Auch müßte statt der Gleichung I_α die genaue Gleichung I gebraucht und für ϱ der Wert des Erdradius von Königsberg eingeführt werden, der nach Tafel IV der Nachträge sich auf

$$\log \varrho = 9{,}99906 - 10 \text{ stellt.}$$

Was die Parallaxe des Mondhalbmessers betrifft, die bei strengen Rechnungen nie außer acht gelassen werden darf, da sie auf ca. 1/3 Min. steigen kann, so sei darüber folgendes bemerkt. Ein Beobachter auf der Erdoberfläche steht dem Monde merklich näher als ein Beobachter im Mittelpunkte der Erde, und es kann die Differenz der Entfernungen sich offenbar (in dem Orte der Erdoberfläche, welcher den Mond im Zenite hat) auf einen vollen Erdhalbmesser belaufen. Auf der Erdoberfläche erscheint deshalb der Mondhalbmesser größer als im Erdcentrum, und da in den Tafeln der Mondhalbmesser sich auf das letztere bezieht, so muß dieser bei parallaktischen Rechnungen noch mit folgender Korrektion versehen werden.

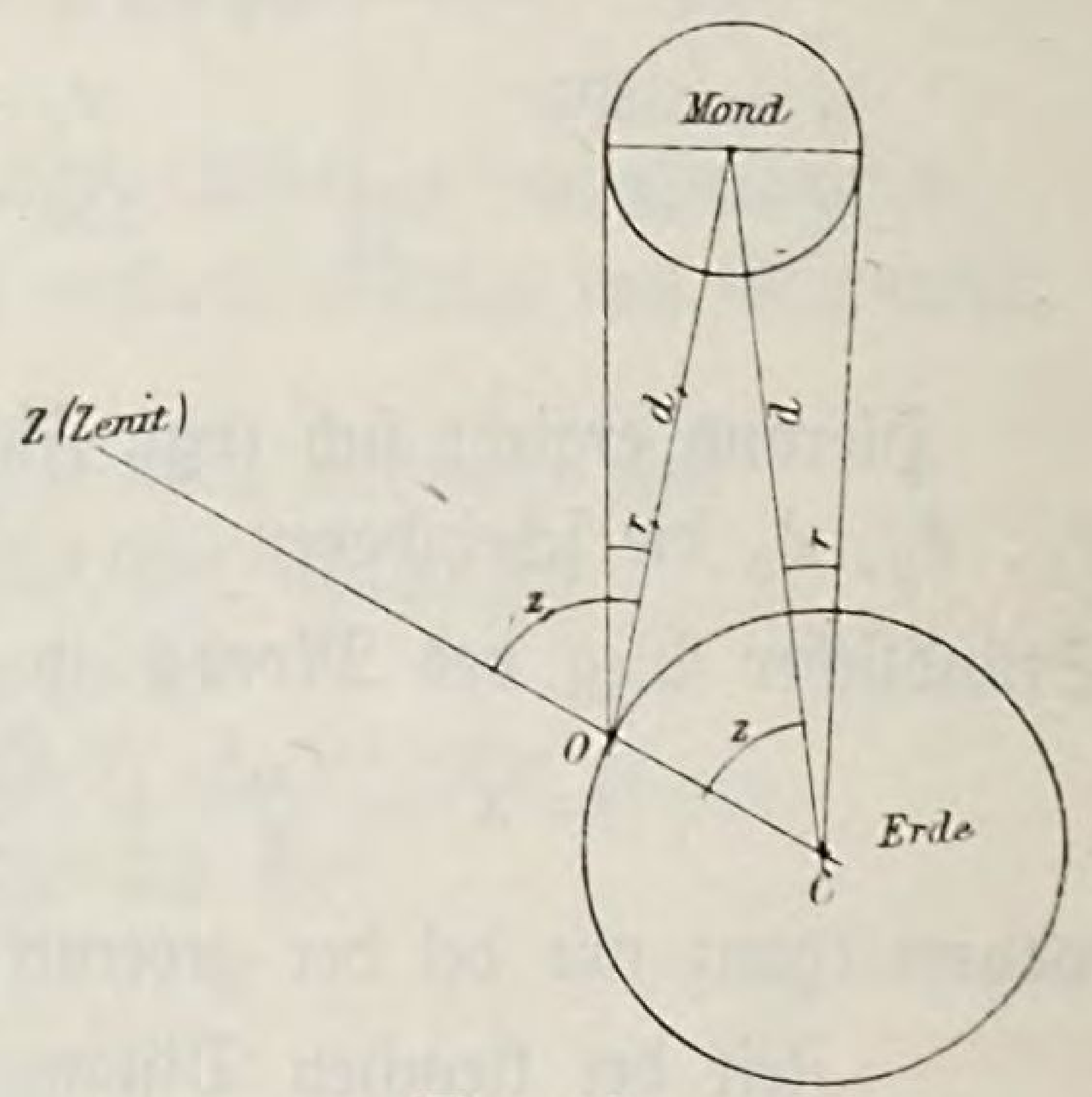


Fig. 16.

Bedeuten (Fig. 16):

r_1, r den scheinbaren, bezw. wahren Mondhalbmesser,

z_1, z die scheinbare, bezw. wahre Zenitdistanz des ☾,

d_1, d dessen lineare Entfernungen von O und C,

dann hat man:

$$\sin r_1 : \sin r = d : d_1$$
$$= \sin z_1 : \sin z$$
$$= \sin z_1 : \sin (z_1 - \Pi \sin z_1) \ldots \text{vgl. (VI)}$$
$$= \sin z_1 : [\sin z_1 - \cos z_1 \sin z_1 \,\Pi],$$

woraus mit Rücksicht auf die Kleinheit von r_1 und r:

$$r_1 = r\,(1 + \cos z_1\,\Pi),$$

oder auch unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von Π:

$$r_1 = r\,(1 + \cos z\,.\,\Pi).$$

Vermöge dieser Gleichungen findet man den scheinbaren Mondhalbmesser r_1 aus den durch die Tafeln gegebenen wahren Radius r, der Äquatorial-Horizontalparallaxe Π und der wahren oder scheinbaren Zenitdistanz (z oder z_1). — Der scheinbare Sonnenhalbmesser, wenn man auch auf dessen Parallaxe Rücksicht nehmen will, kann selbstverständlich nach derselben Regel bestimmt werden.

Anderes Verfahren zur Berechnung der lokalen Finsternis.

Berechnet man nach der in der sphärischen Astronomie (p. 63 und 64) gegebenen Anweisung die in einem gegebenen Erdorte und zu gegebenen Zeiten des Meridians der Tafeln stattfindenden scheinbaren Äquatorkoordinaten:

$$A_1,\ D_1$$
$$a_1,\ d_1$$

sowie nach dem eben mitgeteilten Verfahren die scheinbaren Gestirnsradien

$$R_1 \text{ und } r_1,$$

dann läßt sich aus diesen scheinbaren Koordinaten die scheinbare (lokale) relative Bahn des Monds genau ebenso herleiten, wie die wahre (geocentrische Bahn aus den geocentrischen Koordinaten. Man könnte deshalb den scheinbaren Verlauf der Finsternis auf demselben Wege ermitteln, der bei der Mondfinsternis zur Anwendung gekommen ist, nur daß man an Stelle der Ekliptikkoordinaten die des Äquators treten läßt, wenn man es nicht vorzieht, auch hier die (scheinbaren) Ekliptikkoordinaten einzuführen. In den folgenden Beispielen werden wir jedoch die Rechnung mit einer kleinen Modifikation ausführen, die an betreffender Stelle erklärt werden soll.

Sonnenfinsternis vom 3. August 431 v. Chr.

(im ersten Jahre des peloponnesischen Kriegs nach Thukyd. II, 28*)).

Elemente, bezogen auf den Horizont von Athen:

Mittl. Athen. Zeit	AR ☉ = A_1	AR ☾ = a_1	Dekl. ☉ = D_1
431. VIII. 3. $3^h\,51^m,2$	$126^0\,50'\,16''$	$126^0\,22'\,52''$	$+19^0\,24'\,9''$
$4^h\,51^m,2$	$126^0\,52'\,45''$	$126^0\,50'\,46''$	$+19^0\,23'\,34''$

Mittl. Athen. Zeit	Dekl. ☾ = d_1	Scheinb. Rad. ☉ = R_1	Scheinb. Rad. ☾ = r_1
431. VIII. 3. $3^h\,51^m,2$	$+19^0\,48'\,19''$	$15'\,51'',6$	$15'\,40'',1$
$4^h\,51^m,2$	$+19^0\,33'\,51''$	$15'\,51'',6$	$15'\,37'',9$

In Figur 17 seien um $3^h\,51^m,2$:

S, M die Örter der Sonne und des Monds,

D_1, d_1, A_1, a_1 deren Koordinaten in Bezug auf den scheinbaren Äquator AQ, sowie

LS der Parallelkreis der Sonne.

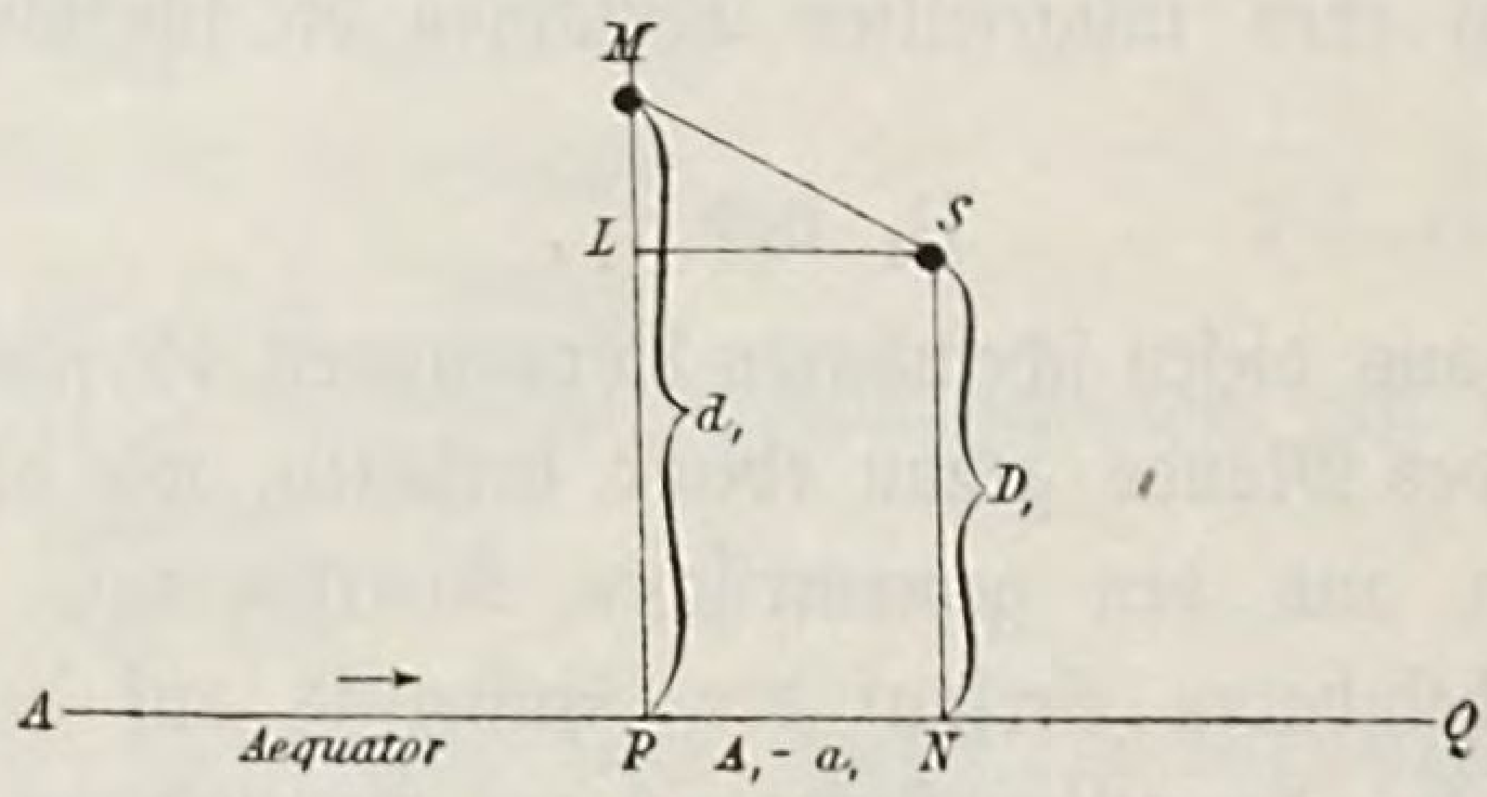


Fig. 17.

Man hat dann im vorliegenden Falle:

1) $A_1 - a_1 = 1644''$

2) $LS = (A_1 - a_1) \cos D_1 = 1550'',6$

*) Vgl. die Abhandlung von E. Heis: „Die Finsternisse während des peloponnesischen Kriegs“.

3) stündliche Änderung der $A_1 = \triangle A_1 = 149''$
4) stündliche Änderung der $a_1 = \triangle a_1 = 27' \, 54''$
5) relative stündliche Bewegung des Monds in $AR = \triangle a_1 - \triangle A_1 = 1525''$
6) relative stündliche Bewegung des Monds, bezogen auf den Parallelkreis $LS = 1525'' . \cos D_1 = 1439''$
7) relative stündliche Bewegung des Monds in Deklination $= \triangle d_1 - \triangle D_1 = - 833''$
8) stündliche Änderung des scheinbaren Mondradius $= \triangle r_1 = - 2'', 2$.

Betrachten wir nun in Fig. 17 die Sonne als ruhend, berücksichtigen also nur die relative Bewegung des Monds, dann ist nach x Stunden

die Kathete $LS = 1550'', 6 - 1439'' . x$
die Kathete $ML = d_1 - D_1 = 1450'' - 833'' \, x$
der Mondradius $r_1 = 15' \, 40'', 1 - 2'', 2 \, x$.

Bestimmt man x der Bedingung gemäß:

$$(1550{,}6 - 1439 \, x)^2 + (1450 - 833 \, x)^2$$
$$= [15' \, 51'',6 + (15' \, 40'',1 - 2'',2 . x)]^2 = (1891{,}7 - 2{,}2 \, x)^2,$$

dann erhält man in den beiden Werten von x die Anzahl Stunden, welche von $3^h \, 51^m{,}2$ ab bis zum Anfange, bezw. Ende der partialen Finsternis verfließen. Denn die Gleichung drückt offenbar aus, daß die Entfernung zwischen Mond- und Sonnenmittelpunkt (die Hypotenuse SM) gleich ist der Summe von Mond- und Sonnenradius

$$= 15' \, 51'',6 + (15' \, 40'',1 - 2'',2 \, x),$$

wie es der Anfang oder das Ende der Finsternis erfordert.

Die Auflösung der Gleichung liefert:

$$x_1 = 0^h, 1434 = 0^h \; 8^m \, 36^s$$
$$x_2 = 2^h, 3426 = 2^h \, 20^m \, 33^s.$$

Mithin:

Anfang der Finsternis:	$3^h \, 51^m \, 12^s + 0^h \; 8^m \, 36^s = 3^h \, 59^m \, 48^s$
Ende der Finsternis:	$3^h \, 51^m \, 12^s + 2^h \, 20^m \, 33^s = 6^h \, 11^m \, 45^s$
Dauer derselben:	$2^h \, 11^m \, 57^s$
Mitte derselben:	$5^h \; 5^m \, 46^s$.

Sind (Fig. 18) M_1, M_2, M_3 die Örter des Mondmittelpunkts bei Beginn, in der Mitte und am Ende der Finsternis, dann hat man für die kleinste Distanz

$$SM_2 = \sqrt{SM_1^2 - M_1M_2^2}.$$

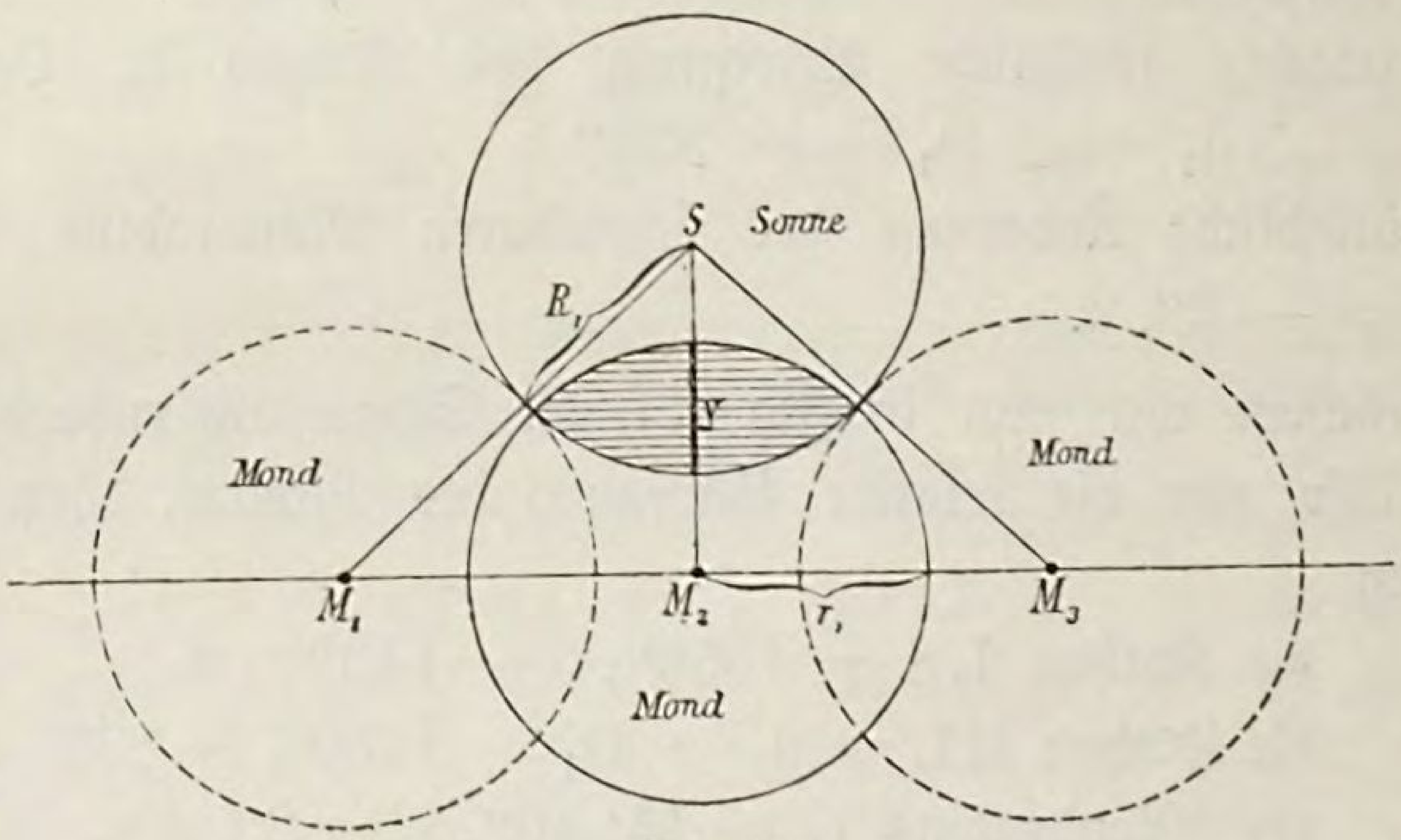


Fig. 18.

Da die relative stündliche Bewegung des Monds in seiner Bahn

$$= \sqrt{1439^2 + 833^2},$$

da ferner derselbe $2^h\ 11^m\ 57^s$ braucht, um von M_1 nach M_3 zu gelangen, so wird:

$$\begin{aligned} SM_2 &= \sqrt{(R_1 + r_1)^2 - 0{,}5 \,.\, 2^h\ 11^m\ 57^s \sqrt{1439^2 + 833^2}} \\ &= 488''. \end{aligned}$$

Gewöhnlich teilt man, um die Größe der Bedeckung anzugeben, den Sonnendurchmesser in 12 gleiche Abschnitte, die man Zolle nennt und giebt dann an, wieviel Zoll durch den Mond verdunkelt sind. Also (s. Fig. 18)

$$\begin{aligned} y = R_1 - (SM_2 - r_1) &= 1441'' \\ &= \frac{1441}{2\,R_1} \cdot 12 \text{ Zoll} \\ &= 9{,}1 \text{ Zoll}. \end{aligned}$$

Die Finsternis ist demnach etwas mehr als neunzöllig.

Sonnenfinsternis vom 21. Juni 400 v. Chr.
(vgl. Ciceros Schrift: De re publica, I, 16).

Elemente der Finsternis für den Horizont von Rom:

Mittlere Zeit von Rom	AR ☉ = A_1	AR ☾ = a_1	Dekl. ☉ = D_1
400. VI. 21. $7^h 7^m$	83° 10′ 28″	82° 59′ 16″	+ 23° 35′ 53″
$8^h 7^m$	83° 13′ 4″	83° 10′ 28″	+ 23° 36′ 0″

Mittlere Zeit von Rom	Dekl. ☾ = d_1	R_1 ☉ = R_1	r_1 ☾ = r_1
400. VI. 21. $7^h 7^m$	+ 23° 36′ 4″	15′ 45″, 5	16′ 29″, 6
$8^h 7^m$	+ 23° 36′ 55″	15′ 45″, 5	16′ 26″, 6

Die Anwendung der obigen Methode ergiebt:

1) relative stündliche Bewegung des Monds im Parallkreise = 2355″
2) relative stündliche Bewegung des Monds in Deklination = + 44″

$$x_1 = - 33^m\ 38^s$$
$$x_2 = + 1^h\ 4^m\ 51^s$$

Also:

3) Anfang der Finsternis: $6^h\ 33^m\ 22^s$
4) Mitte der Finsternis: $7^h\ 22^m\ 36^s$
5) Ende der Finsternis: $8^h\ 11^m\ 51^s$
6) kleinste Distanz = 24″,74
7) Bedeckung in Zollen = y = 12,12 Zoll (mithin total).

Der Anfang und das Ende der totalen Finsternis wird gefunden, indem man die Zeitpunkte sucht, wann die Entfernung von Mond- und Sonnenmittelpunkt

$$= r_1 - R_1,$$

da diese Bedingung für die erste und zweite innere Randberührung erfüllt sein muß.

Man erhält:

8) Anfang der totalen Finsternis: $7^h 21^m 37^s$

9) Ende der totalen Finsternis: $7^h 23^m 35^s$

10) Dauer der totalen Finsternis $= 1^m 58^s$.

3. Die Ausbreitung einer Sonnenfinsternis auf der Erdoberfläche.

Berechnet man diejenigen Punkte der Erdoberfläche, in welchen die n-zöllige Phase als Maximum der Verfinsterung erscheint, dann liegen dieselben auf einer Linie, die man

die Kurve der n-zölligen Finsternis

nennt. Unter diesen Kurven sind insbesondere fünf von größerem Interesse, zunächst diejenige, welche den geometrischen Ort der Punkte bildet, die die Sonne central verfinstert sehen, die sog. Kurve der Centralität. Indem der Mondschatten während einer totalen Finsternis über die Erde hinwegstreicht, erzeugt er in jedem Augenblicke zwei Flecken, den des totalen Schattens und den des partialen Schattens, und wenn auch die Peripherieen dieser Schattenflecken keineswegs genau kreisförmig sind, so wird man sich doch eine annähernd richtige Vorstellung machen, wenn man sich in jedem Augenblicke um den Ort der centralen Finsternis als Mittelpunkt zwei konzentrische Kreise denkt, deren einer den Flecken des Vollschattens, deren anderer den des Halbschattens darstellt.

Bewegt sich ein Auge längs der Peripherie eines Vollschattenfleckens, so wird dasselbe stets nur innere Randberührung der Mond- und Sonnenscheibe wahrnehmen, indem der gemeinsame Berührungspunkt allmählich den ganzen Sonnenrand durchläuft. Unter diesen Punkten werden sich immer zwei befinden und zwar auf entgegengesetzten Seiten der Centralitätskurven, in denen die innere Randberührung zugleich als größte Phase erscheint, die demnach eine totale Finsternis ohne Dauer (von unendlich kleiner Dauer) wahrnehmen. Die Gesamtheit dieser Punkt-Paare gehört zwei auf verschiedenen Seiten der Centralitätslinie liegenden Kurven an, welche die Kurven der Totalität genannt werden. In ähnlicher Weise gehören diejenigen Punkte auf den Peripherieen der Halbschattenflecken,

welche die äußere Randberührung als größte Phase sehen, den Kurven der Partialität an, welche zugleich die nördliche und südliche Grenze für die Sichtbarkeit der Finsternis überhaupt bezeichnen.

Außer diesen Kurven gleicher Phase (Isophasen) könnte man auch noch die Kurven gleicher Dauer (Isochronen) in Betracht ziehen, welche die Punkte umfassen, in welchen die Finsternis gleiche Zeit, z. B. eine Stunde, währt.

Der Regel nach ist eine Kurve gleicher Phase verschieden von einer Kurve gleicher Dauer wegen der Verschiedenheit der relativen Geschwindigkeit des Monds in den scheinbaren Bahnen. Nur die Kurven kleinster Phase und kleinster Dauer fallen zusammen und zwar beide mit den Kurven der äußeren Randberührung. Die äußersten Grenzen für die Sichtbarkeit der Finsternis lassen sich deshalb unter einem doppelten Gesichtspunkte auffassen und feststellen, als Kurven kleinster Phase oder als Kurven kleinster Dauer.

Die Berechnung der Peripherieen der Schattenflecken.

Will man diejenigen Örter bestimmen, welche in einem gegebenen Zeitpunkte sämtlich äußere oder innere Randberührung wahrnehmen und also den momentanen Peripherieen des Halb- und Vollschattenfleckens angehören, so gehe man zunächst auf die Gleichung II_α (S. 40) zurück. In dieser Gleichung ist δ als bekannt zu betrachten, sobald die Zeit des Meridians der Tafeln gegeben ist. Setzt man außerdem

$$\triangle = R + r,$$

so wird dadurch in die Gleichung die Bedingung für die äußere Randberührung eingeführt. In diesem Falle können die scheinbaren Zenitdistanzen der Gestirne

$$Z_1 \text{ und } z_1$$

sich höchstens um den Betrag $R + r$ unterscheiden. Legt man also dem z_1 nach und nach Werte bei zwischen den Grenzen

$$Z_1 \pm (R + r),$$

dann bleibt in der Gleichung jedesmal nur die eine Unbekannte Z_1 zurück. Nachdem alsdann Z_1 bestimmt, ist selbstverständlich auch z_1 bekannt, da ja die Differenz von z_1 und Z_1 gegeben ist. Aus z_1 und Z_1 werden nun ferner vermöge der Gleichungen V und VI (S. 41)

die wahren Zenitdistanzen Z und z und nächstdem mit Hilfe der Relationen III und IV die geographischen Koordinaten

$$\varphi \text{ und } t$$

gefunden. Denn in den letzten Gleichungen sind die geocentrischen Gestirnskoordinaten

$$A, D, a, d$$

für jede gegebene Zeit gleichfalls bekannt. Auf diesem Wege kann man sich soviel Punkte der Peripherie des partialen Schattens berechnen als man deren wünscht.

Wird
$$\triangle = r - R$$
und z_1 zwischen den Grenzen

$$Z_1 \pm (r - R)$$

genommen, dann lassen sich auch in beliebiger Anzahl Punkte der Peripherie des Vollschattens finden.

Bei dieser Rechnung ist die Erde als Kugel betrachtet und von der Parallaxe des Mondhalbmessers abgesehen worden. Wird größere Genauigkeit verlangt, dann muß man bei einer wiederholten Rechnung sich der Gleichung II bedienen, in der man (nach Tafel II und IV der Nachträge) für ϱ den der Gleichung

$$\log \varrho = 9{,}9985458 - \tfrac{1}{2} \log (\sin^2 \varphi + 0{,}9933255 \cos^2 \varphi)$$

entsprechenden Wert einsetzt, während für φ der bereits aus der ersten Rechnung bekannte Näherungswert angenommen wird. Außerdem setzt man, um die Parallaxe des Mondhalbmessers mit in Rechnung zu bringen:

$$\triangle = R + r\,(1 + \cos z \sin \Pi).$$

Schließlich ist dann noch zu beachten, daß das jetzt gefundene φ die geocentrische Breite des Orts darstellt und mit Tafel III der Nachträge noch in geographische Breite zu verwandeln ist.

Die vollständigen Bedingungsgleichungen für die Orte gleicher Phase.

Eliminiert man aus der Gleichung (vgl. S. 40, I):

$$\cos \triangle = \frac{\cos \delta - \varrho \cos Z \sin \Pi - \varrho \cos z \sin \pi - \varrho^2 \sin \Pi \sin \pi}{\sqrt{1 - 2\,\varrho \cos z \sin \Pi + \varrho^2 \sin^2 \Pi} \;\; (1 - \varrho \cos Z \sin \pi)}$$

die Größen Z, z, ϱ mit Zuziehung der Relationen:

$$\cos Z = \sin D \sin \varphi + \cos D \cos \varphi \cos (t - A)$$
$$\cos z = \sin d \sin \varphi + \cos d \cos \varphi \cos (t - a)$$
$$\log \varrho = 9{,}9985458 - \tfrac{1}{2} \log (\sin^2 \varphi + 0{,}9933255 \cos^2 \varphi),$$

dann enthält die rechte Seite außer den geographischen Koordinaten

$$\varphi, t$$

lauter geocentrische Größen

$$A, D, a, d,$$

welche als bekannt anzunehmen sind, sobald die Zeit

$$\Theta$$

des Meridians der Tafeln gegeben ist. Wir dürfen deshalb setzen:

$$\left.\begin{array}{ll} & \cos \triangle = F (\Theta, \varphi, t) \\ \text{oder auch:} & \cos \triangle = f (A, D, a, d, \varphi, t - A) \end{array}\right\} \ldots\ldots (\alpha).$$

Bei dieser Gelegenheit sei daran erinnert, daß $t - A$ die wahre Ortszeit, also $\Theta - (t - A)$ die geographische Länge λ des Orts darstellt, und demnach auch $\Theta - \lambda$ statt $t - A$ gesetzt werden kann.

Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich verschiedene interessante Fragen beantworten, z. B.:

Welchen scheinbaren Abstand $\triangle$ haben Sonne und Mond zu einer bestimmten Zeit Θ in einem gegebenen Orte $(\varphi, t - A)$? Nachdem man die Koordinaten A, D, a, d, welche zur Zeit Θ stattfinden, berechnet und eingeführt hat, liefert die Gleichung unmittelbar die Lösung. — Ferner:

Um welche wahre Zeit Θ des Hauptmeridians sieht ein gegebener Ort (φ, λ) eine bestimmte Distanz $\triangle$, etwa äußere Randberührung $(\triangle = R + r)$? In diesem Falle führt das schon bei anderen Gelegenheiten (vgl. u. a. S. 49) angewendete Verfahren zum Ziele, indem man von den einer bestimmten Zeit Θ_0 entsprechenden Koordinaten A, D, a, d ausgeht, deren stündliche Änderungen $\triangle A$, $\triangle D$, $\triangle a$, $\triangle d$ sucht und dann ausrechnet, wieviel Stunden vor oder nach jener Zeit die Koordinaten den Bedingungen der aufgeworfenen Frage genügen. Nennt man die Anzahl der Stunden x (so daß $\Theta = \Theta_0 + x$), dann lautet die zu lösende Gleichung:

$$\cos (R + r) = f (A + \triangle A . x, D + \triangle D . x, a + \triangle a . x,$$
$$d + \triangle d . x, \varphi, \Theta_0 - \lambda + x).$$

Die wichtigste Frage, welche uns gegenwärtig beschäftigt, ist indessen die folgende:

Welcher Ort (φ, λ) sieht zu einer bestimmten Zeit Θ eine vorgeschriebene Phase $\triangle$ als Maximum der Verfinsterung?

Bei diesem Problem erscheinen zunächst zwei der Größen

$$\triangle,\ \Theta,\ \varphi,\ t,$$

welche die Gleichung (α) konstituieren, nämlich

$$\varphi \text{ und } t$$

als Unbekannte, und es bedarf daher zu ihrer Bestimmung noch einer zweiten Gleichung. Diese muß die Bedingung aussprechen, daß die vorgeschriebene Distanz $\triangle$ für den gesuchten Ort das Maximum der Annäherung von Sonne und Mond darstelle.

Um die Betrachtung an einen konkreten Fall anzuschließen, wollen wir annehmen, dies Maximum der Annäherung solle in äußerer Randberührung bestehen. Alsdann ist einleuchtend, daß der Moment der Berührung gleichzeitig den Anfang, das Ende und die Mitte der Finsternis, jedenfalls also, was hier allein in Betracht kommt, die Mitte der Finsternis bezeichnet. Gleiche Zeiten, z. B. eine Stunde, vor und nach diesem Momente haben demnach die beiden Gestirne gleiche Distanz, die wir durch

$$R + r + x$$

andeuten wollen. Es müssen mithin die Gleichungen bestehen:

$$\cos(R + r + x) = f(A + \triangle A, D + \triangle D, a + \triangle a, d + \triangle d, \varphi, \Theta + 15^0 - \lambda) \text{ und}$$

$$\cos(R + r + x) = f(A - \triangle A, D - \triangle D, a - \triangle a, d - \triangle d, \varphi, \Theta - 15^0 - \lambda).$$

Durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke folgt hieraus die das Stattfinden des Maximums aussprechende Beziehung:

$$f(A + \triangle A, D + \triangle D, a + \triangle a, d + \triangle d, \varphi, \Theta + 15^0 - \lambda)$$
$$= f(A - \triangle A, D - \triangle D, a - \triangle a, d - \triangle d, \varphi, \Theta - 15^0 - \lambda) \quad (\beta).$$

Dieselbe in Verbindung mit der Gleichung:

$$\cos(R + r) = f(A, D, a, d, \varphi, \Theta - \lambda) \; . \; . \; . \; . \; . \; (\gamma)$$

ermöglicht die Berechnung von φ und λ.

Wird nicht die äußere, sondern die innere Randberührung als kleinste Distanz angenommen, dann hat man nur in Gleichung (γ)

$$r - R \text{ statt } r + R$$

zu setzen.

Soll (vgl. Fig. 18) der Ort der

m — zölligen Finsternis

bestimmt werden, so setze man (da 1 Zoll $= \frac{R}{6}$)

$$\triangle = R + r - \frac{mR}{6}.$$

Wir sind also nunmehr in den Stand gesetzt, beliebig viele Punkte irgend einer Isophase zu berechnen. Allerdings bietet die Auflösung der Gleichungen (β) und (γ) noch erhebliche Schwierigkeiten, die sich kaum anders beseitigen lassen, als durch das in solchen Fällen immer übliche und bewährte Verfahren, zunächst genäherte Werte von φ und t zu suchen und dann erst nach den Grundsätzen der Fehlerrechnung dieselben zu verbessern. Um zu solchen Näherungswerten zu gelangen, lassen sich im vorliegenden Falle verschiedene Wege einschlagen. Man kann beispielsweise die Gleichungen (β) und (γ) zur Auflösung geeignet machen (auf eine Gleichung zweiten Grads zurückführen), indem man die Erde zunächst als Kugel betrachtet ($\varrho = 1$ setzt) und die Sonnenparallaxe, die höheren Potenzen der Mondparallaxe und die Parallaxe des Mondhalbmessers außer acht läßt.

Man kann aber auch zur Erzielung von Näherungswerten eine mehr empirische Methode in Anwendung bringen, auf die man sich sogar beschränken darf, wenn bei Bestimmung der Isophasen nur eine mäßige Genauigkeit beansprucht wird. Nehmen wir nämlich an, die Kurve der Centralität sei mit möglichster Genauigkeit bestimmt — was, — wie wir bald sehen werden, ohne besondere Schwierigkeit geschehen kann — und setzen ferner voraus, was wir nach früheren Erörterungen dürfen, auch die geographische Länge des Orts sei bereits bekannt, welcher die centrale Finsternis im wahren Mittage sieht. Da diese Phase der Erdfinsternis in dem Momente eintritt, wo die geocentrischen Rektascensionen beider Gestirne gleiche Größe erreichen, dieser Zeitpunkt aber nahe zusammenfällt mit der Konjunktion in Länge, also

auch sehr nahe liegt dem Augenblicke der größten geocentrischen Phase, so folgt, daß in diesem Momente die geocentrische Mondbahn nahezu senkrecht steht auf dem Meridiane jenes Orts (da die Verbindungslinie von Mond- und Sonnenmittelpunkt in dem Meridiane liegt, diese aber im Augenblicke der größten Phase senkrecht auf der Mondbahn steht). Da nun alle Orte der Erdoberfläche durch die Rotation der Erde sich gleichfalls in einer zu ihrem Meridiane senkrechten Richtung fortbewegen, so wird an der Perpendikularität der Mondbahn nichts geändert werden, wenn man vom Mittelpunkte der Erde zu irgend einem Punkte des mehr erwähnten Meridians übergeht. Alle Punkte dieses Erdmeridians erreichen mithin in dem Augenblicke der Äquatorialkonjunktion nahezu ihre größte Finsternisphase.

Es ist nun aber sehr leicht, die geographische Breite derjenigen Orte zu bestimmen, welche auf diesem Meridiane liegen und die Sonne central verfinstert, oder äußere oder innere Randberührung sehen: und wir werden sehr bald — teils bei der allgemeinen Berechnung der Centralitätskurve, teils in den weiter unten folgenden Rechnungsbeispielen — auf diese verschiedenen Punkte zurückkommen.

Sobald man aber für diesen einen Zeitpunkt die Orte bestimmt, welche als Maximum der Verfinsterung äußere oder innere Randberührung wahrnehmen, wird man überhaupt die Kurven dieser Phasen mit ziemlicher Genauigkeit erhalten, wenn man von diesen Orten aus auf einem Erdglobus parallel zur Kurve der Centralität Linien zieht. Für die gewöhnlichen Zwecke wird, wie gesagt, diese Bestimmung der Isophasen ausreichen. Wird eine exakte Feststellung verlangt, dann kann man die so gefundenen Linien wenigstens zur Ermittelung von Näherungswerten von φ und t benutzen. Will man z. B. wissen, welche Orte zur Zeit Θ die äußere Randberührung als größte Phase sehen, so gehe man auf der Kurve der Centralität zunächst bis zu dem Punkte, welcher um diese Zeit centrale Finsternis hat, errichte in diesem Punkte auf der Centralitätskurve senkrechte Bogen: die Schnittpunkte dieser Bogen mit den beiden Kurven der äußeren Randberührung werden dann jedenfalls in der Nähe der gesuchten Orte liegen. — Übrigens mag noch bemerkt werden, daß auch die nach dem Obigen leicht be-

stimmbaren Peripherieen der Schattenflecken bei der angenäherten Lösung der vorliegenden Aufgabe eine vorteilhafte Verwendung finden können.

Eine genaue Bestimmung der Centralitätskurve nach Zeit und Lage bildet demnach eine wesentliche Grundlage dieses empirischen Verfahrens und überhaupt einen wichtigen Teil der ganzen Untersuchung. Wir werden uns deshalb noch etwas eingehender mit dieser Bestimmung zu befassen haben.

Im Augenblicke der centralen Finsternis ist zunächst stets

$$\triangle = 0.$$

Es besteht aber auch ferner, wovon man sich mit Zuhilfenahme der Figur 15 leicht überzeugt, stets die zweite Gleichung:

$$Z = z + \delta,$$

auch wenn nicht, wie im Falle der Figur, die beiden Gestirne in demselben Meridiane stehen.

Außerdem hat man für die scheinbaren Zenitdistanzen noch die Relation $Z_1 = z_1$.

Die Gleichung II verwandelt sich demnach in:

$$\cos \delta = \sqrt{1 - \sin^2 Z_1 \sin^2 \Pi}, \text{ oder}$$

$$\sin Z_1 = \frac{\sin \delta}{\sin \Pi} = \sin z_1.$$

Nach Berechnung von Z_1 ergiebt sodann die Gleichung V:

$$Z = Z_1 - \pi . \sin Z_1$$

die wahre Zenitdistanz der Sonne und die Gleichung

$$z = Z - \delta$$

die des Monds.

Endlich findet man aus den Gleichungen:

$$\cos Z = \sin D \sin \varphi + \cos D \cos \varphi \cos (t - A)$$

$$\cos z = \sin d \sin \varphi + \cos d \cos \varphi \cos (t - a)$$

die geographischen Koordinaten

$$\varphi \text{ und } t$$

des gesuchten Orts.

Die Rechnung gestaltet sich bis auf die etwas umständliche Auflösung der beiden letzten Gleichungen ungemein einfach. Man kann aber statt deren zwei andere einführen, welche

die Größen φ und t

unmittelbar liefern.

Es ist bereits oben darauf hingewiesen, daß Sonne und Mond für den Ort O der centralen Finsternis (s. Fig. 15) in demselben Vertikale stehen und ihre wahren Zenitdistanzen sich um δ unterscheiden, so daß für den Mittelpunkt der Erde stets die Konstellation der Figur 19 stattfindet. Aus dieser Figur folgt aber ohne weiteres, indem man beachtet, daß $\cos x = -\cos y$, die Gleichung für die geographische Breite φ:

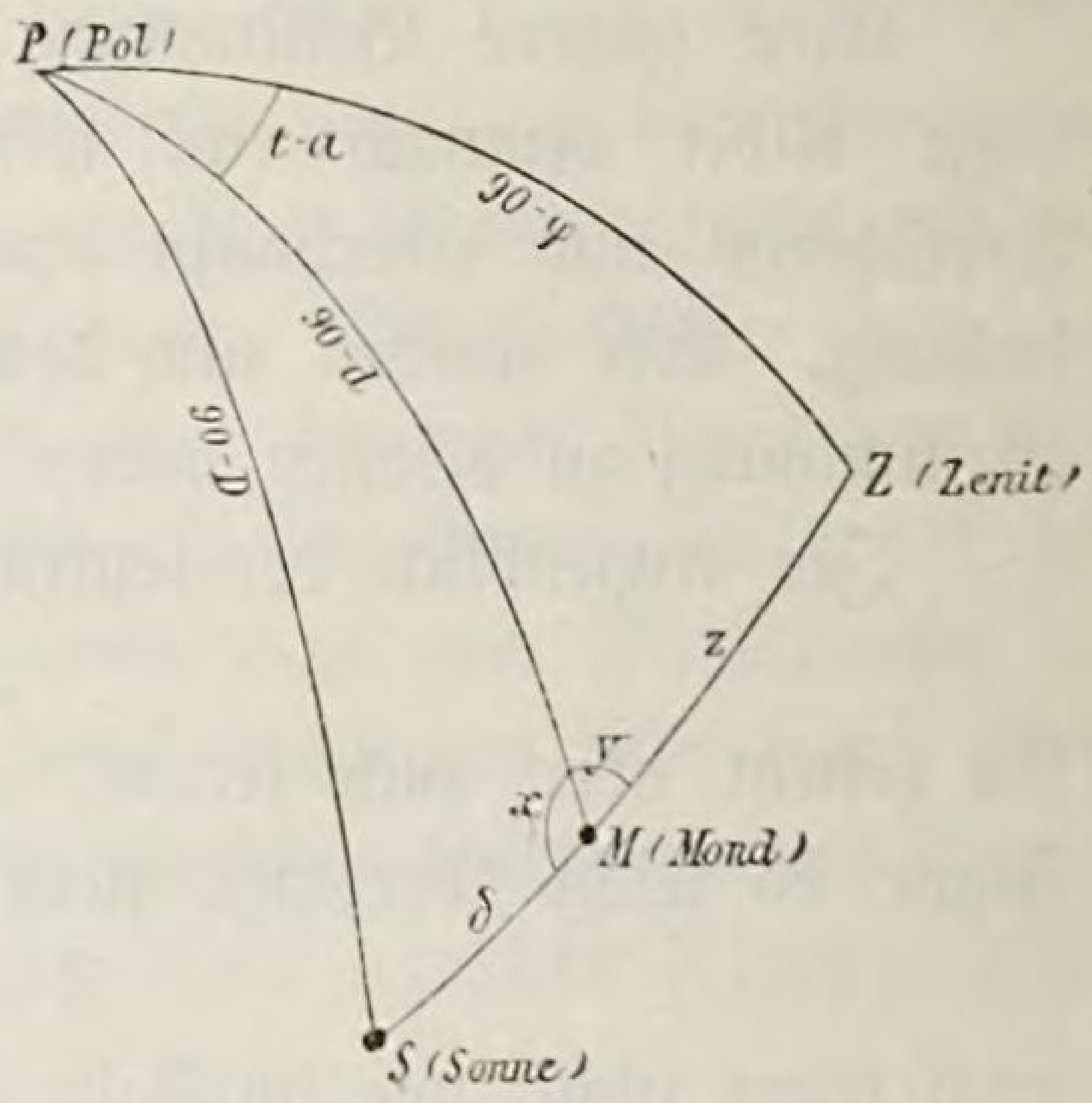


Fig. 19.

$$\sin \varphi = \frac{\sin d \sin (z + \delta) - \sin D \sin z}{\sin \delta}$$

und für die Sternzeit t des Orts:

$$\cos \frac{t - a}{2} = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} (\varphi + d + z) \cos \frac{1}{2} (\varphi + d - z)}{\cos \varphi \cos d}}.$$

Damit ist das Schema für die Berechnung des jeweiligen Orts der centralen Finsternis auf wenige einfache Formeln zurückgeführt.

Indessen ist hierbei die Erdabplattung noch unberücksichtigt geblieben. Will man sie in Betracht ziehen, dann muß man die Rechnung wiederholen, indem man von der Gleichung ausgeht:

$$\cos \delta = \sqrt{1 - \varrho^2 \sin^2 Z_1 \sin^2 \Pi}, \text{ oder:}$$

$$\sin Z_1 = \frac{\sin \delta}{\varrho \sin \Pi} = \sin z_1.$$

Für ϱ ist dann der dem gefundenen Näherungswerte des Orts entsprechende Erdradius einzuführen.

Endlich sei noch bemerkt, daß man, wenn auch die Glieder, welche den Faktor $\sin \pi \sin \Pi$ enthalten, in der Gleichung II beibehalten werden, erhält:

$$\cos \delta = \sqrt{1 - \varrho^2 \sin^2 Z_1 \sin^2 \Pi} + \varrho^2 \sin^2 Z_1 \sin \pi \sin \Pi.$$

Wird die Wurzelgröße entwickelt, indem man die Glieder mit der vierten oder einer noch höheren Potenz von $\sin \Pi$ als verschwindend fortläßt, wird außerdem zur rechten Seite der Gleichung das gleichfalls unmerkliche Glied $- \frac{1}{2} \varrho^2 \sin^2 \pi \sin^2 Z_1$ hinzugefügt, dann ergiebt sich:

$$\cos \delta = 1 - \tfrac{1}{2} \varrho^2 \sin^2 Z_1 \sin \Pi + \varrho^2 \sin^2 Z_1 \sin \pi \sin \Pi$$
$$- \tfrac{1}{2} \varrho^2 \sin^2 Z_1 \sin^2 \Pi,$$

oder:

$$\sin Z_1 = \sin z_1 = \frac{2(1 - \cos \delta)}{\varrho^2 (\sin \Pi - \sin \pi)^2} = \frac{2 \sin \frac{\delta}{2}}{\varrho (\sin \Pi - \sin \pi)}$$

Rechnungsbeispiele.

A.

Gesucht die geographischen Koordinaten des Orts, welcher die centrale Finsternis im wahren Mittage sieht.

Auflösung.

Für die geographische Länge ist bereits oben (S. 36) der Wert

$$33^0\ 42',8 \text{ westl. v. Greenw.}$$

gefunden worden.

Aus Fig. 15 aber folgt weiter, daß in diesem Falle die geographische Breite $\varphi = Z + D$.

Für die Zeit der Äquatorialkonjunktion (nach S. 36 = $2^h\ 14^m,9$ wahrer Gr. Z.) ist nun

$$D = 19^0\ 4'\ 3'',6$$
$$d = 19^0\ 50'\ 42'',5$$
$$\Pi = 3629'',6$$
$$\pi = 8'',45,$$

woraus (Fig. 15) zunächst

$$\delta = d - D = 46'\ 38'',9,$$

sodann

$$\sin Z_1 = \frac{\sin \delta}{\sin \Pi - \sin \pi} = \frac{2799}{3621}$$
$$Z = Z_1 - \pi \sin Z_1 = 50^0\ 38',6,$$

endlich:

$$\varphi = 19^0\ 4',1 + 50^0\ 38',6 = 69^0\ 42',7.$$

Mit Berücksichtigung der Erdabplattung ergiebt die Gleichung

$$\sin Z_1 = \frac{2 \sin \frac{\delta}{2}}{\varrho (\sin \Pi - \sin \pi)},$$

in der man für ϱ den der Breite $69^0\ 43'$ angemessenen Wert, also

$$\log \varrho = 9,99872$$

setzt, zunächst den verbesserten Wert von Z_1, woraus dann

$$Z = 50^0\ 51'$$

$$\text{Geocentrische Breite } \varphi_1 = 50^0\ 51' + 19^0\ 4',1$$
$$= 69^0\ 55',1$$

und schließlich (nach Tafel III der Nachträge):

$$\text{Geographische Breite } \varphi = 69^0\ 55',1 + 7',4$$
$$= 70^0\ 2',5.$$

B.

Gesucht der Ort, welcher um $3^h\ 30^m$ w. Gr. Z. die Sonne central verfinstert sieht.

Auflösung.

Um diese Zeit ist (vgl. S. 35):

$$\delta = 3540''$$

$$\sin Z_1 = \frac{\delta}{\Pi - \pi} = \frac{3540}{3623'}$$

also

$$Z_1 = 77^0\ 42'\ 44''$$
$$Z = 77^0\ 42'\ 36''$$
$$z = Z - \delta = 76^0\ 43'\ 36''.$$

Ferner:

$$D = 19^0\ \ 3'\ 20'',\ 30$$
$$d = 19^0\ 43'\ 33'',\ 85,$$

so daß:

$$\sin\varphi = \frac{\sin d\ \sin Z - \sin D\ \sin z}{\sin\delta}$$

$$\log\sin\varphi = 9{,}8455644$$

$$\varphi = 44^0\ 29',\ 2 = \text{geogr. Breite.}$$

Endlich:

$$\cos\frac{t - A}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi + D + Z)\ \cos\frac{1}{2}(\varphi + D - Z)}{\cos\varphi\ \cos D}},$$

also:

Stundenwinkel der Sonne = wahre Ortszeit = t — A

= $91^0\ 21',\ 2$

Wahre Z. i. Gr. = $52^0\ 30'$

Östl. Länge v. Gr. = $38^0\ 51',\ 2$.

Bei diesen Bestimmungen ist jedoch der Einfluß der Erdabplattung noch nicht in Rechnung gebracht.

C.

Gesucht der Ort, welcher zur Zeit der Äquatorialkonjunktion als Maximum der Verfinsterung innere oder äußere Randberührung (totale oder partiale Verfinsterung ohne Dauer) wahrnimmt.

Auflösung.

Es giebt offenbar je zwei Orte, der eine nördlich, der andere südlich vom Orte der Centralität. Beide Punktpaare liegen nach den früheren Erörterungen mit dem Orte der Centralität sehr annähernd auf demselben Meridiane, also $2^h\ 14^m, 9$ westl. v. Greenwich.

Der nördliche Punkt (vgl. Fig. 15) sieht die innere, bezw. äußere Berührung am Südrande, der südliche am Nordrande der Gestirne.

Um die geographische Breite desjenigen zu finden, der die innere Randberührung im Norden wahrnimmt, hat man folgende Gleichungen (vgl. Fig. 15):

$$Z = z + \delta$$
$$Z_1 = z_1 + (r - R)$$
$$Z = Z_1 - \pi \sin Z_1$$
$$z = z_1 - \Pi \sin z_1$$
$$\varphi = Z + D.$$

Vernachlässigt man bei einer ersten Rechnung das sehr kleine Glied $\pi \sin Z_1$ sowie die Parallaxe des Mondhalbmessers r, dann ergiebt sich durch Elimination von

$$Z,\ z \text{ und } Z_1$$

aus den vier ersten Gleichungen:

$$\sin z_1 = \frac{\delta - (r - R)}{\Pi} = \frac{2799 - 42{,}7}{3630}$$
$$z_1 = 49^0\ 24'\ 13''$$
$$Z_1 = 49^0\ 24'\ 56''$$
$$= Z$$
$$\varphi = Z + D = 49^0\ 24'\ 56'' + 19^0\ 4'\ 4''$$
$$= 68^0\ 29'.$$

Um die oben außer Rechnung gebliebenen Größen zu berücksichtigen, wird man die Bestimmung wiederholen und nur für die zweite und dritte Gleichung substituieren:

$$Z_1 = z_1 + [r\,(1 + \cos 49^0\,24'\,13'' \sin \Pi) - R]$$
$$Z = Z_1 - \pi \sin 49^0\,24'\,56''.$$

Der gefundene Wert von φ ist dann die geocentrische Breite des Orts.

Die Rechnung für den Ort, dem die innere Berührung am Südrande erscheint, gestaltet sich ebenso mit dem Unterschiede, daß diesmal

$$Z_1 = z_1 - (r - R)$$

zu nehmen ist.

Um endlich noch den Ort zu bestimmen, für welchen die äußere Berührung am Nordrande stattfindet, setze man

$$Z_1 = z_1 + (r + R), \text{ dann wird:}$$

$$\sin z_1 = \frac{\delta - (r + R)}{\Pi} = \frac{863}{3630}$$
$$z_1 = 13^0\,45'\,12''$$
$$Z_1 = 13^0\,45'\,12'' + 32'\,16''$$
$$= 14^0\,17'\,28''$$
$$= Z$$
$$\varphi = Z + D = 14^0\,17'\,28'' + 19^0\,4'\,4''$$
$$= 33^0\,21',5.$$

Hat man auf diese Weise die gesuchten fünf Hauptpunkte des in $2^h\,14^m,9$ westl. Länge von Gr. liegenden Meridians festgestellt, nämlich den Punkt der Centralität,
die beiden Punkte der Totalität und
die beiden Punkte der Partialität,
dann führe man auf einem Erdglobus durch die vier letztgenannten Punkte Kurven parallel zur Linie der Centralität bis in die, bereits früher bestimmten Gegenden der Erde, wo die gesamte Finsternis anfängt und endet. Man erhält so ein annähernd richtiges Bild von der Ausbreitung der Finsternis.

Wird für einen oder mehrere Orte eine größere Genauigkeit verlangt, dann kann man die erhaltenen Näherungswerte der Orts-

Koordinaten auf dem früher besprochenen Wege noch einer (nach Umständen wiederholten) Korrektion unterziehen.

Die vollständigen Bedingungsgleichungen für die Orte gleicher Dauer.

Die zu lösende Aufgabe lautet:

In welchem Punkte der Erdoberfläche beginnt die m-stündige Finsternis zur Zeit Θ?

Auflösung.

Um Θ Uhr w. Z. des Anfangsmeridians sei:

1) $\cos \delta = \sqrt{1 - 2\,\varrho \cos z \sin \Pi + \varrho^2 \sin^2 \Pi}\,(1 - \varrho \cos Z \sin \pi)$
$\cos (R + r_1) + \varrho \cos Z \sin \Pi + \varrho \cos z \sin \pi - \varrho^2 \sin \Pi \sin \pi$

2) $\cos Z = \sin D \sin \varphi + \cos D \cos \varphi \cos (\Theta - \lambda)$

3) $\cos z = \sin d \sin \varphi + \cos d \cos \varphi \cos (\Theta + A - a - \lambda)$ *)

4) $r_1 = r\,(1 + \cos z \sin \Pi)$,

während um $\Theta + m$ Uhr:

5) $\cos \delta_0 = \sqrt{1 - 2\,\varrho \cos z_0 \sin \Pi_0 + \varrho_2 \sin^2 \Pi_0}\,(1 - \varrho$
$\cos Z_0 \sin \pi) \cos (R + r_{,,}) + \varrho \cos Z_0 \sin \Pi_0 + \varrho \cos z_0$
$\sin \pi - \varrho^2 \sin \Pi_0 \sin \pi$

6) $\cos Z_0 = \sin D_0 \sin \varphi + \cos D_0 \cos \varphi \cos (\Theta + m - \lambda)$

7) $\cos z_0 = \sin d_0 \sin \varphi + \cos d_0 \cos \varphi \cos (\Theta + A_0 - a_0$
$- \lambda + m)$

8) $r_{,,} = r\,(1 + \cos z_0 \sin \Pi_0)$.

Außerdem:

9) $\log \varrho = 9{,}9985458 - \frac{1}{2} \log (\sin^2 \varphi + 0{,}9933255 \cos^2 \varphi)$.

In beiden Systemen von Gleichungen haben die Ortskoordinaten

$$\varphi,\ \lambda$$

denselben Wert. Das eine System drückt aus, daß zur Zeit Θ dieser Ort

die Distanz $\triangle = R + r_1$,

*) Vergl. S. 55.

also äußere Randberührung, das andere, daß er zur Zeit $\Theta + m$

die Distanz $\triangle = R + r_{\prime\prime}$,

also abermals äußere Randberührung hat. Beide Bedingungen sind nur so miteinander vereinbar, daß zur Zeit Θ die Finsternis im Orte (φ, λ) beginnt, zur Zeit $\Theta + m$ endet, daß also die Finsternis in diesem Orte, zur Zeit Θ beginnend,

m Stunden

währt.

Daß das Problem durch die aufgestellten Gleichungen vollkommen bestimmt ist, folgt aus der Gleichheit der Anzahl Unbekannten:

$$Z,\ z,\ r_1,\ Z_0,\ z_0,\ r_{\prime\prime},\ \varphi,\ \lambda,\ \varrho$$

und der Anzahl der Gleichungen.

Um dieselben in einem gegebenen Falle aufzulösen, wird man selbstverständlich bei einer ersten Rechnung zunächst alle zulässigen Vereinfachungen eintreten lassen, also die Sonnenparallaxe, die höheren Potenzen der Mondparallaxe sowie die Parallaxe des Mondhalbmessers vernachlässigen und außerdem $\varrho = 1$ (d. h. die Erde als Kugel) setzen.

Wird die Dauer der Finsternis unendlich klein angenommen, dann erhält man diejenigen beiden Örter, welche zur Zeit Θ und $\Theta + d\Theta$ äußere Randberührung, diese demnach als Maximum der Verfinsterung wahrnehmen. Die beiden Gleichungen reducieren sich in diesem Falle auf die beiden, für dieselben Orte bereits bei einer früheren Gelegenheit entwickelten Beziehungen.

Wir glauben hiermit die Berechnung der Sonnenfinsternisse abschließen zu dürfen, da die vorhergehende Untersuchung ausreichende Anhaltspunkte bietet, um alle wichtigen Fragen, zu welchen diese Phänomene Anlaß geben, entscheiden zu können.

Für solche Leser, welche sich in derartigen Rechnungen üben wollen, mögen bezüglich der totalen und centralen Sonnenfinsternis vom 28. Juli 1851, deren Elemente unserer bisherigen Betrachtung vorzugsweise zu Grunde lagen, noch folgende Resultate (nach Sawitsch, Abr. d. prakt. Astr.) hier Platz finden:

Kurve der Centralität
(mit Berücksichtigung der Erdabplattung).

Geographische Breite	Östl. Länge v. Gr.	Wahre Zeit v. Gr.
53° 27′	222° 22′	$1^h\ 19^m, 3$
64° 0′	251° 28′	$1^h\ 28^m, 6$
70° 0′	326° 21′	$2^h\ 14^m, 9$
60° 0′	8° 5′	$2^h\ 56^m, 6$
50° 0′	28° 36′	$3^h\ 21^m, 5$
38° 49′	52° 43′	$3^h\ 33^m, 7$

Südliche Kurve der Totalität
(mit Erdabplattung, aber ohne Parallaxe des Mondhalbmessers).

Geographische Breite	Östl. Länge v. Gr.	Wahre Zeit v. Gr.
52° 0′	221° 13′	$1^h\ 18^m, 3$
62° 0′	249° 7′	$1^h\ 25^m, 4$
69° 54′	305° 49′	$2^h\ 0^m, 2$
62° 0′	359° 19′	$2^h\ 47^m, 7$
50° 0′	25° 44′	$3^h\ 20^m, 8$
38° 0′	52° 34′	$3^h\ 33^m, 8$

Nördliche Kurve der Totalität.
(Bedingungen wie bei der südlichen Kurve.)

Geographische Breite	Östl. Länge v. Gr.	Wahre Zeit v. Gr.
54° 0′	219° 10′	$1^h\ 21^m, 2$
64° 0′	246° 44′	$1^h\ 28^m, 4$
72° 1′	305° 32′	$2^h\ 1^m, 3$
64° 0′	1° 21′	$2^h\ 46^m, 2$
54° 0′	23° 49′	$3^h\ 13^m, 8$
40° 0′	54° 13′	$3^h\ 30^m, 9$

Vierter Abschnitt.

Von den Sternbedeckungen und den Durchgängen der unteren Planeten vor der Sonnenscheibe.

1. Sternbedeckungen.

Die Bedeckungen gewisser Fixsterne durch die Mondscheibe (sowie die selteneren Bedeckungen von Planeten durch den Mond, oder von Fixsternen durch Planeten, oder von Planeten durch Planeten) werden in derselben Weise berechnet wie die Sonnenfinsternisse, d. h. die Bedeckungen der Sonne durch den Mond. Indessen gestalten sich diese Rechnungen durch den Wegfall der eigenen Bewegung, der Parallaxe und des Durchmessers der Fixsterne ungleich einfacher. Außerdem ist auch der Moment des Eintritts eines Fixsterns, namentlich wenn derselbe auf der nicht erleuchteten Seite des Monds erfolgt, mit weit größerer Schärfe zu fixieren als der Beginn der Sonnenfinsternis oder eines Venusdurchgangs. Alle diese Verhältnisse machen diese Phänomene sehr geeignet, sowohl die Elemente der Mondbahn als auch die geographischen Längen der Beobachtungsörter einer genauen Kontrolle zu unterziehen. Das Verfahren, dessen man sich bei diesen Korrektionen bedient, ist das schon mehrfach angedeutete der „Fehlerrechnung", auf das wir bei Berechnung der Venusdurchgänge zurückkommen werden. Hier sei nur noch erwähnt, daß die bedeutendsten Sterne, welche vom Monde vermöge der Lage seiner Bahn bedeckt werden können, die folgenden sind:

Aldebaran, das Siebengestirn, Regulus im Löwen, die Kornähre der Jungfrau und Antares im Skorpion.

2. Venusdurchgänge.

A. Allgemeines.

Die beiden unteren Planeten Venus und Merkur befinden sich in s. g. unterer Konjunktion (Fig. 20), wenn sie zwischen Sonne und Erde stehen und in oberer Konjunktion (Fig. 21), wenn die Sonne zwischen Erde und Planet sich befindet. Eine Opposition ist selbstverständlich bei den unteren Planeten ausgeschlossen. Von hoher praktischer Bedeutung sind namentlich diejenigen unteren Konjunktionen der ♀, bei denen die Breite derselben gering genug ist, daß sie nicht (wie gewöhnlich) oberhalb oder unterhalb der Sonnenscheibe, sondern über dieselbe hinwegzieht und während dieses „Durchgangs" als ein schwarzer Punkt auf der Sonnenscheibe erscheint. Diese Venusvorübergänge, deren in jedem Jahrhundert höchstens zwei statthaben können, bilden nämlich, wie bereits in der sphär. Astr. erwähnt, das vornehmste Mittel zur Bestimmung der Sonnenparallaxe. In der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts (1761 und 1769) wurden dieselben zuerst zu diesem Zwecke beobachtet und seit dieser Zeit rührt überhaupt unsere genauere Kenntnis der Sonnenparallaxe her. Die Annahmen schwanken von da ab nur zwischen den Grenzen 8″,45 und 8″,9, während vorher eine Unsicherheit von 3″—4″ bestand. Die Durchgänge Merkurs sind wegen der geringen Parallaxe dieses Planeten zu solchen Bestimmungen wenig geeignet.

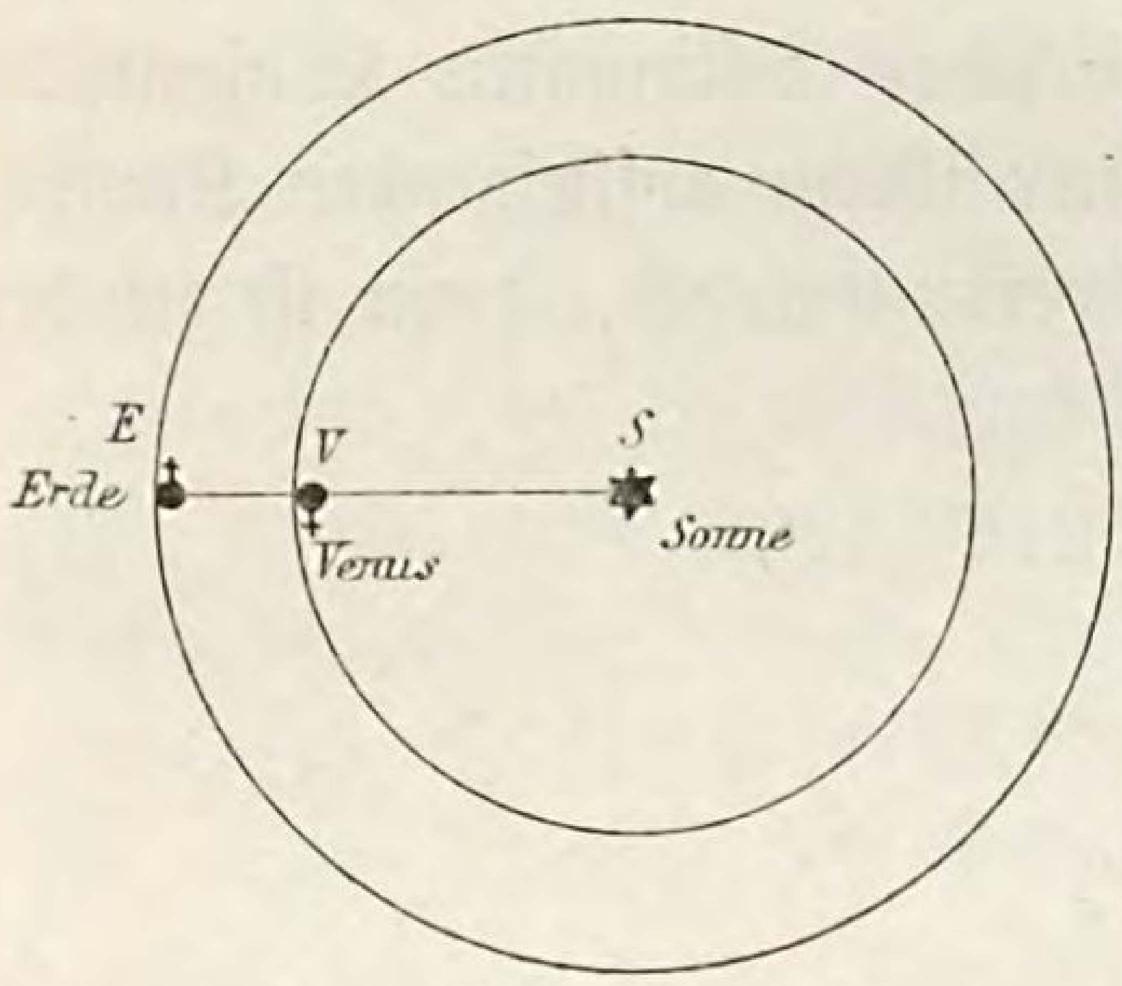


Fig. 20.

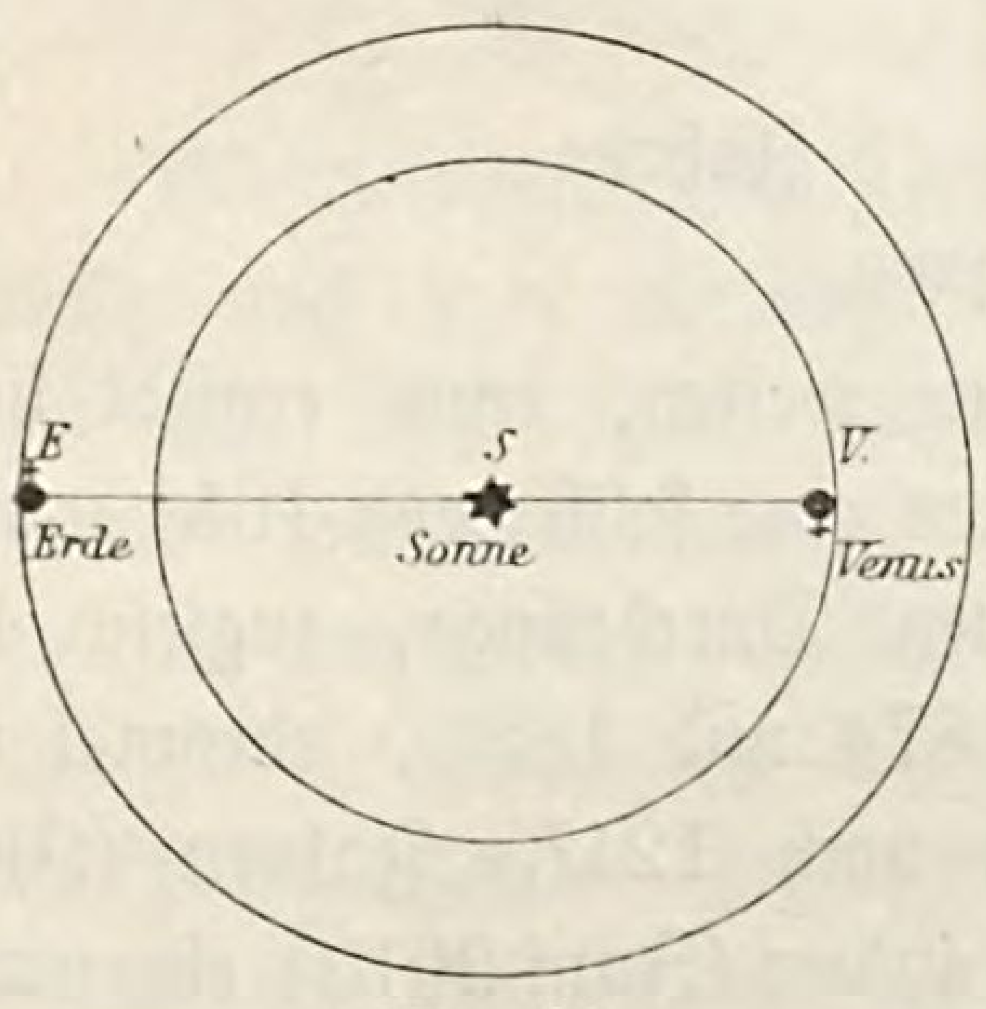


Fig. 21.

B. Möglichkeit der Venusdurchgänge; ihre Perioden.

Ein Vorübergang der Venus vor der Sonnenscheibe kann offenbar nur stattfinden, wenn (von der Wirkung der Parallaxe abgesehen) ihre Breite um die Zeit der Konjunktion geringer ist als der Sonnendurchmesser. Eine leichte Rechnung zeigt, daß dies bei der Neigung der Venusbahn gegen die Ekliptik (ca. $3^0\ 23',5$) bloß dann eintreten kann, wenn Venus um jene Zeit weniger als $1^0\ 49'$ vom Knoten ihrer Bahn entfernt ist. — Die Zwischenzeit zweier aufeinanderfolgender unteren Konjunktionen nennt man eine synodische Revolution. Dieselbe beträgt bei der Venus (♀) cc 584 Tage. Während dieses Zeitraums schreitet die Sonne um

$$360^0 + 215^0\ 32' = 575^0\ 32'$$

vor. Gesetzt also die Venus stehe bei einer bestimmten Konjunktion (welche man als Epoche wählt) 1^0 hinter ihrem aufsteigenden Knoten, so daß dieselbe mit einem Durchgang verbunden ist, dann ist sie bei der 2., 3., 4., 5. und 6. Konjunktion bzw.

$$215^0\ 32' + 1^0 = 216^0\ 32',$$
$$432^0\ 4' = 72^0\ 4',$$
$$287^0\ 36',$$
$$503^0\ 8' = 143^0\ 8',$$
$$358^0\ 40'$$

vom ☊ entfernt. Demnach findet nur die letzte Konjunktion in einer für einen Durchgang hinreichenden Nähe des Knotens statt (nämlich in $1^0\ 20'$). Nach Verlauf von

$$5 \text{ syn. Rev.} = 2920^d = 8 \text{ Jahren}$$

ereignet sich mithin ein zweiter Vorübergang.

Führt man die vorstehende Rechnung weiter, dann ergiebt sich, daß auf eine Unterbrechung von 8 Jahren eine solche von $105^1/_2$ und $121^1/_2$ Jahren folgt. Die beiden letzten Durchgänge, zugleich die einzigen in diesem Jahrhundert, traten 1874 und 1882, jedesmal im Dezember, ein. Der nächste wird erst nach $121^1/_2$ Jahren (Juni 2004) stattfinden. Dann folgt 8 Jahre später (Juni 2012) ein neuer Durchgang, der von dem nächsten (Dezember 2117) um $105^1/_2$ Jahre getrennt ist. Dann entsteht wiederum eine Pause von 8, von $121^1/_2$, von

8, von $105^1/_2$ Jahren u. s. f. Man wird sich leicht selbst sagen können, daß, wenn die Zwischenzeit eine ganze Anzahl von Jahren (nämlich 8) umfaßt, die beiden entsprechenden Durchgänge jedesmal in denselben Monat, Juni oder Dezember, fallen, daß hingegen der eine Durchgang im Juni, der andere im Dezember liegt, wenn beide $105^1/_2$ oder $121^1/_2$ Jahre voneinander abstehen. — Da ferner die Länge des ☊ der Venusbahn gegenwärtig cc 75^0 beträgt und nur einer sehr langsamen Bewegung (von cc 33″ jährlich) unterworfen ist, so wird die geocentrische Länge der Sonne während eines Vorübergangs entweder

$$75^0 \text{ oder } 180^0 + 75^0 = 255^0$$

ausmachen, je nachdem derselbe am aufsteigenden oder absteigenden Knoten eintritt. Jene Länge aber hat die Sonne Anfang Juni, bzw. Anfang Dezember. Erst nach langen Zeiträumen werden deshalb die Venusdurchgänge allmählich in den Mai oder November rücken. — Außerdem ist zu merken, daß die erwähnten Perioden zunächst nur im allgemeinen über die Möglichkeit eines Durchgangs Aufschluß gewähren, daß jedoch, weil hier nur die mittleren synodischen Umläufe in Rechnung gebracht werden, infolge der davon etwas abweichenden wahren Bewegung ein nach dieser Bestimmung möglicher Durchgang — namentlich, wenn derselbe den Grenzen der Möglichkeit nahe liegt — auch vereitelt werden kann. Im konkreten Falle muß hierüber also immer erst eine genauere Rechnung entscheiden.

C. Berechnung eines Venusdurchgangs.

Die Berechnung des geocentrischen Verlaufs eines Venusdurchgangs erfolgt nach ganz ähnlichen Regeln wie die einer Mond- oder Sonnenfinsternis. Als neues Moment tritt nur der Umstand hinzu, daß diesmal nicht die Erde den Mittelpunkt der Bewegung bildet — um den sich der Mond wirklich und die Sonne scheinbar in einer Ebene bewegt — sondern die Sonne. Dies hat zur Folge, daß die durch die Planetentafeln gegebenen heliocentrischen Koordinaten der Venus vor Beginn der Rechnung erst in geocentrische umgesetzt werden müssen. Im übrigen darf jedoch auch hier der in Betracht kommende kleine Teil der Venusbahn als gerade Linie betrachtet

werden. — Auch der Verlauf für einen bestimmten Ort der Erde kann nach dem oben Mitgeteilten ohne jede Schwierigkeit gefunden werden, indem hier nur überall an Stelle der Koordinaten und der Parallaxe des Monds die entsprechenden Größen der Venus treten. Wenngleich der Endzweck dieser Rechnungen und der ihnen zu Grunde liegenden Beobachtungen gerade die Bestimmung (oder richtiger die Korrektion) der Venusparallaxe ist, so weiß man doch soviel bereits mit Sicherheit, daß dieselbe in der unteren Konjunktion keinesfalls erheblich von 30″ verschieden ist. Dies berechtigt uns bei allen diesen Rechnungen die höheren Potenzen nicht bloß der Sonnen-, sondern auch der Venusparallaxe zunächst außer acht zu lassen und demnach die Gleichung (I) in der Form zu verwenden:

$$\cos \triangle = \frac{\cos \delta - \varrho \cos Z \sin \Pi - \varrho \cos z \sin \pi}{1 - \varrho \cos z \sin \Pi - \varrho \cos Z \sin \pi}.$$

Über die Bedeutung der Buchstaben ist hier nichts hinzuzufügen. Sie ist dieselbe wie bei den früheren Untersuchungen; nur daß alle Größen, welche bisher sich auf den Mond bezogen, von jetzt ab die gleichnamigen Elemente der Venus darstellen.

Ebenso bleiben die bei den Sonnenfinsternissen kennen gelernten Methoden im wesentlichen unverändert, wenn es sich um die Ortsbestimmung der hier besonders wichtigen Punkte handelt, welche

den Eintritt der Venus in die Sonnenscheibe

sowie deren Austritt zuerst und zuletzt wahrnehmen.

Endlich reichen die früher gegebenen Anleitungen hin, diejenigen Erdörter zu bestimmen, welche zu einer gegebenen Zeit den Eintritt sehen u. s. f.

Nur hat man hier überall zu bedenken, daß niemals ein Erdort in den Kernschatten, sondern stets nur in den ringförmigen Schatten der Venus eintreten, und die Erde in ihrer ganzen Ausdehnung in den Bereich dieses Schattens fallen kann, so daß alle Punkte der erleuchteten Erdhälfte die Venus gleichzeitig vor der Sonnenscheibe erblicken. Ferner darf man nicht vergessen, daß die Venus in der unteren Konjunktion rückgängig ist, also der Sonne entgegengeht, dem-

nach auch an der entgegengesetzten Seite in die Sonnenscheibe eintritt wie der Mond.

Die Einzelheiten dieser Rechnungen können wir nach den gemachten Bemerkungen hier übergehen und uns sofort dem letzten Teile der Untersuchung zuwenden, welcher sich mit den verschiedenen **Anwendungen** der Finsternisse und Bedeckungen in der praktischen Astronomie beschäftigt und die man als den wesentlichsten Zweck der Beobachtung dieser Erscheinungen bezeichnen darf.

Fünfter Abschnitt.

Anwendung der Mond- und Sonnenfinsternisbeobachtungen sowie der Durchgänge der unteren Planeten.

---

1. Gebrauch der Mond- und Sonnenfinsternisbeobachtungen zur Bestimmung der geographischen Länge und zur Korrektion der Mondtafeln.

Schon Hipparch verfiel auf den glücklichen Gedanken, die Beobachtung der Mondfinsternisse zur Ermittelung der geographischen Längendifferenz zweier Erdorte zu benutzen. Nachdem er die wichtige Entdeckung gemacht hatte, daß die Differenz der Zeiten im wesentlichen einerlei ist mit der Differenz der geographischen Längen zweier Orte, konnte es seinem durchdringenden Geiste nicht lange verborgen bleiben, daß zur Bestimmung jener Differenz nur die Beobachtung einer Erscheinung erforderlich sei, welche an beiden Orten in demselben absoluten Zeitmomente wahrgenommen werden konnte. Die Differenz der Ortszeiten dieser Erscheinung mußte nämlich unmittelbar die Differenz der geographischen Längen ergeben. Als eine zu solchen Bestimmungen höchst brauchbare, weil gleichzeitig auf der halben Erde sichtbare Erscheinung erkannte dann Hipparch die Verfinsterung des Monds beim Eintritte in den Schattenkegel der Erde.

Allerdings ist dieses Verfahren der Längenbestimmung auf dem Festlande nur noch ausnahmsweise in Gebrauch, weil man gegenwärtig über ungleich zuverlässigere Methoden zu verfügen hat. Indessen findet

dasselbe zur Feststellung der Länge zur See auch jetzt noch eine sehr ausgedehnte Verwendung. Denn wenn auch hier vorzugsweise die Verfinsterung der Jupitermonde den Gegenstand der Beobachtung bilden (vgl. sphär. Astr., p. 25) und immer nur an einem Orte eine wirkliche Beobachtung angestellt wird, so ist doch das Prinzip der Methoden stets das nämliche.

Auch zur Berichtigung der Theorie des Monds machte Hipparch und nach ihm Ptolemäus von der Beobachtung der Mondfinsternisse einen sinnreichen Gebrauch.

Doch hat diese Seite der Anwendung einer Mondfinsternisbeobachtung in der Jetztzeit, welche an die Genauigkeit der Beobachtungen die höchsten Anforderungen stellt, ihre praktische Bedeutung verloren. Denn eine hinreichende Schärfe kann eine Mondfinsternisbeobachtung insbesondere darum nicht gewähren, weil die Grenzen der Erdschattenkegel sich zu sehr vermischen und die Momente des Ein- und Austritts deshalb nicht mit der erforderlichen Präzision festgestellt werden können.

Bessere Dienste leisten in dieser Beziehung die Sonnenfinsternisse, bei denen aus leicht erklärlichen Gründen die erwähnten Übelstände in geringerem Maße hervortreten. Indessen müssen wir uns hier auf folgende Andeutungen beschränken.

Zunächst sei bemerkt, daß die Verbesserungen der Mond- und Sonnenbahn stets von der Berichtigung der geogr. Längen getrennt werden kann. Da nämlich die Beobachtungen stets auch an solchen Orten (z. B. auf Sternwarten) angestellt werden, deren geographische Lage bereits mit völliger Sicherheit bekannt ist, so nimmt man die Berichtigung der Bahnelemente zunächst mit Hilfe der an Orten von hinreichend bekannter Lage erhaltenen Beobachtungen vor und benutzt dann diese verbesserten — bis auf weiteres als fehlerfrei anzusehenden — Bahnelemente zur abgesonderten Korrektion minder zuverlässiger geograph. Längen.

Angenommen also, man habe zu einer bestimmten Zeit Θ des Anfangsmeridians an einem genau bekannten Orte (φ, λ)

äußere Randberührung

beobachtet, dann müßte die früher (S. 55) betrachtete Gleichung

$$\cos(R + r_1) = f(A, D, a, d, \varphi, \Theta - \lambda)$$

durch die aus den astronomischen Tafeln für jene Zeit sich ergebenden Größen:

$$A, D, a, d, R, r_1$$

erfüllt werden, wenn diese Größen vollkommen korrekt wären. Da letztere nun aber mit kleinen Fehlern behaftet sind, so wird sich zwischen den beiden Seiten der Gleichung ein kleiner Unterschied herausstellen, so daß

$$\cos(R + r_1) - f(A, D, a, d, \varphi, \Theta - \lambda) = dv.$$

Setzen wir voraus, die wahren Werte der Größen seien

$$A + dA,\ a + da,\ D + dD,\ d + dd,\ R + dR,\ r_1 + dr_1,$$

dann müßte andererseits

$$\cos(R + dR + r_1 + dr_1) - f(A + dA, D + dD, a + da, d + dd, \varphi, \Theta - \lambda) = 0$$

sein.

Wird die letzte Gleichung in bekannter Weise nach den jedenfalls sehr kleinen Größen

$$dA,\ dD \ .\ .\ .\ .\ .$$

entwickelt und mit der ersten Gleichung verbunden, dann folgt eine Gleichung von der Form:

$$n\,dR + n\,dr_1 + p\,dA + q\,da + m\,dD + l\,dd = -\,dv,$$

in welcher die von den Größen

$$A, D, a, d, R, r, \varphi, \Theta - \lambda$$

abhängigen Koëfficienten ebenso wie dv als bekannt zu betrachten sind.

Sind nun außerdem noch die erste und zweite innere, sowie die zweite äußere Randberührung beobachtet, dann erhält man aus diesen drei Beobachtungen weitere Gleichungen zwischen denselben Fehlern. Indessen sind die bis jetzt gefundenen vier Gleichungen zur Bestimmung der Fehler noch nicht hinreichend, da sich deren Anzahl auf sechs beläuft. Diese Fehler sind sämtlich mit Ausnahme desjenigen des scheinbaren Mondradius, der von Ort zu Ort wechselt, als konstant anzusehen. Die Zuziehung der Beobachtungen einer zweiten Station bringt deshalb nur einen einzigen neuen Fehler, nämlich

$$dr_{,,}$$

mit sich, wodurch die Gesamtzahl der Fehler auf sieben anwächst. Da

aber die Beobachtungen der zweiten Station gleichfalls vier Bedingungsgleichungen liefern, so hat man zur Berechnung der 7 Fehler über eine mehr als hinreichende Zahl von Gleichungen, nämlich über acht, zu verfügen. Nachdem auf diesem Wege die tabellarischen Fehler bestimmt sind, schreitet man zur Berichtigung der geographischen Längen der Orte, deren Lage weniger genau bekannt ist. In diesem Falle sind — da man sich jetzt der bereits berichtigten Koordinaten bedienen kann — stets nur zwei Beobachtungen erforderlich zur Ermittelung der beiden Fehler

$$d\lambda, \ d\mathrm{r}_1,$$

denn man wird, wie auch bereits oben geschehen, zur Vereinfachung der Rechnung und aus anderen Gründen wohl thun, den Fehler des scheinbaren Mondradius überall als eine selbständig zu bestimmende Größe zu behandeln. Doch ist dabei zu bemerken, daß ein Fehler in der geogr. Länge auch einen Fehler in der Zeit des Anfangsmeridians — die ja aus der genau bestimmten Ortszeit und der Längendifferenz gefunden wird — zur Folge hat. Dieser Fehler in der Zeit des Hauptmeridians wird sich demnach auch auf die Werte der Koordinaten, welche dieser Zeit gemäß bestimmt werden, übertragen. Doch ändert sich dadurch nicht die Zahl der Fehler, und bei der Bestimmung der Sonnenparallaxe werden wir sehen, in welcher Weise dieser Umstand in Rechnung gebracht wird.

In dem Vorhergehenden ist außerdem auf die Fehler der Gestirns-Parallaxen keine Rücksicht genommen, die jedoch ohne Änderung des Verfahrens auch leicht mit in Betracht gezogen werden können. Für unseren Zweck war es hinreichend, den Leser mit dem Wesen der Methode bekannt zu machen.

2. Bestimmung der Sonnenparallaxe und Korrektion der Venustafeln aus den Durchgängen der Venus.

In der sphär. Astronomie wurde bereits erwähnt, daß man sich zur Ermittelung der Sonnenparallaxe aus den Vorübergängen der Venus zweier verschiedener Methoden bedienen kann, indem man entweder die für verschiedene Erdörter ungleiche

Dauer eines Vorübergangs,

oder die für verschiedene Örter ungleichen

absoluten Zeiten derselben Phase

zu Grunde legt. Wir werden hier vorzugsweise das letztere, als das wissenschaftlich bedeutendste Verfahren einer näheren Besprechung unterziehen, von dem anderen Verfahren aber nur die leitenden Gesichtspunkte mitteilen.

a) Methode der verschiedenen Dauer

(von Halley, 1656—1742, der überhaupt die Venusdurchgäng zuerst — 1716 — zur Bestimmung der Sonnenparallaxe in Vorschlag brachte).

Sehen wir von der rotierenden Bewegung der Erde einen Augenblick ab und nehmen an, die Konjunktion der Venus mit der Sonne fände genau im Moment eines Knotendurchgangs statt, dann würde für einen Beobachter im Erdmittelpunkte die Venus offenbar die Sonnenscheibe längs eines ihrer Durchmesser durchwandern. Ein Beobachter hingegen, der sich auf der Erdoberfläche über die Ekliptik erhöbe, sähe den Durchgang längs einer auf der südlichen Seite der Sonnenscheibe liegenden Sehne verlaufen, und bei genügender Erhebung würde der Beobachter schließlich nur noch Randberührung wahrnehmen.

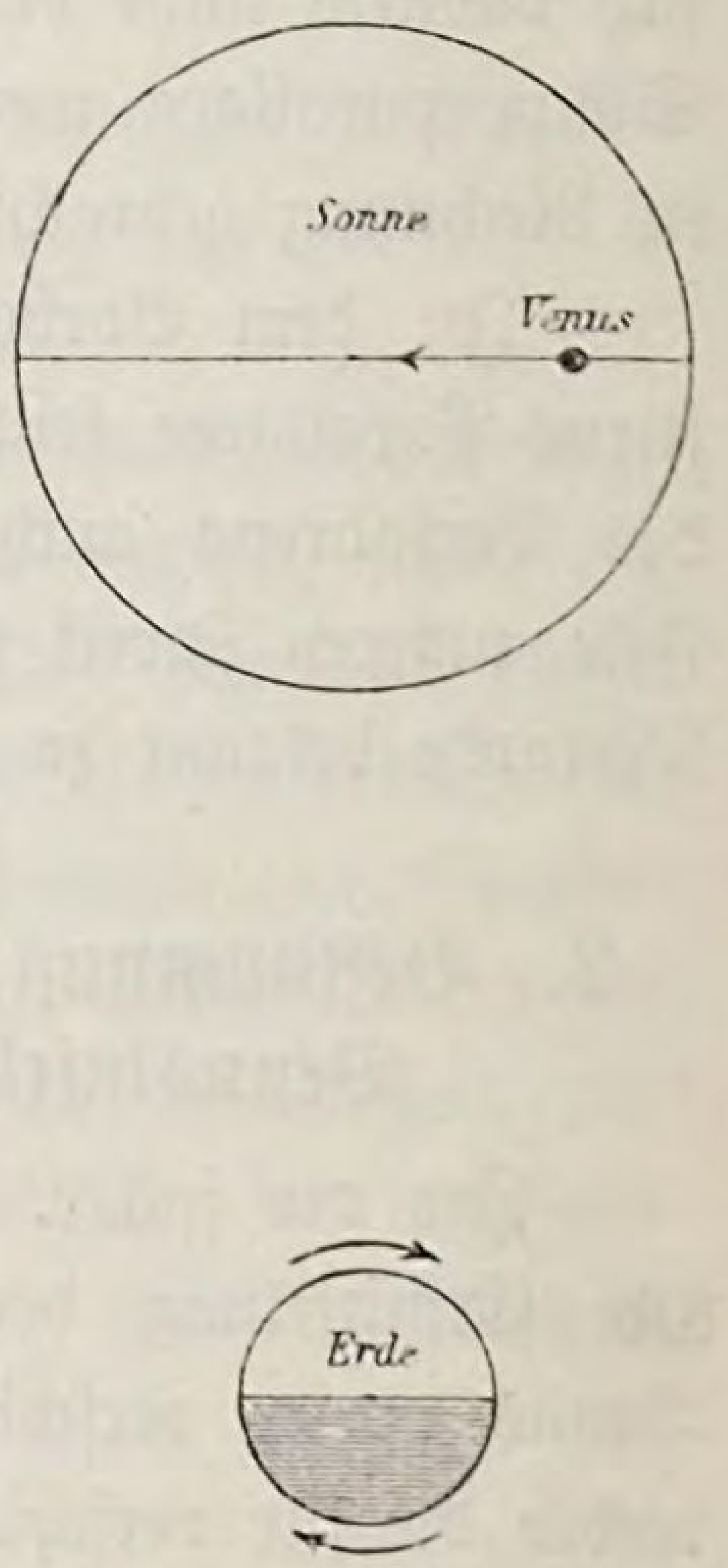


Fig. 22.

Das Entgegengesetzte müßte eintreten, wenn der Beobachter von der Ekliptik nach dem Süden der Erdoberfläche sich bewegte. Auch sieht man leicht ein, daß infolge der Parallaxe (der Änderung des Standpunkts) ähnliche Wirkungen sich ergeben werden, wenn die Konjunktion auch nicht gerade im Knoten, sondern bei einer gewissen nördlichen oder südlichen Breite der Venus stattfindet.

Was nun den Einfluß der Erdrotation betrifft, so muß man sich erinnern, daß bei der unteren Konjunktion die Bewegung der Venus eine rückläufige ist, daß dieselbe mithin in der Richtung von Osten nach Westen über die Sonnenscheibe hinwegzieht. Die Erde aber rotiert von Westen nach Osten, so daß in jedem Augen-

blicke die Bewohner der erleuchteten Erdhälfte eine der Venusbewegung entgegengesetzte, die Bewohner der Nachtseite eine derselben gleichartige Bewegung haben (s. Fig. 22). Bleibt also ein Beobachter während eines Durchgangs stets in der der Sonne zugekehrten Hemisphäre, dann erfährt der Durchgang durch die Rotation eine Verkürzung; befindet er sich während des Vorübergangs teils auf der Tag-, teils auf der Nachtseite, dann wird die Erdumdrehung die Dauer des Durchgangs einerseits verkürzen, andererseits verlängern u. s. f. Da man nun die Art und Größe der rotierenden Bewegung für jeden gegebenen Erdort leicht berechnen kann, so läßt sich auch die Wirkung der Rotation von der der Parallaxe trennen. Aus der reinen Parallaxenwirkung läßt sich dann rückwärts auf die Größe der Parallaxe schließen.

b) Methode der korrespondierenden Phasen.

(Auf Anregung von Joseph Delisle, 1688—1768*), zur Bestimmung der Sonnenparallaxe verwendet, zuerst in umfassender Weise von Delambre, 1749—1822, bei Bearbeitung des gesamten, auf den Durchgang von 1769 sich beziehenden Beobachtungsmaterials.)

Wir werden die Entwickelung der Methode gleichfalls an die erste Hauptform unserer Parallaxengleichung

$$\cos \delta = \sqrt{1 - 2\,\varrho \cos z \sin \Pi + \varrho^2 \sin^2 \Pi}\,(1 - \varrho \cos Z \sin \pi)$$
$$\cos \triangle + \varrho \cos Z \sin \Pi + \varrho \cos z \sin \pi - \varrho^2 \sin \Pi \sin \pi$$

anschließen, in welcher

δ die geocentrische Distanz von Sonne und Venus,

$\triangle$ die von einem Erdorte gesehene (scheinbare) Distanz dieser Himmelskörper,

π die Sonnenparallaxe,

Π die Venusparallaxe,

ϱ den Erdradius am Orte der Beobachtung,

Z, z die geocentrischen Zenitdistanzen von Sonne und Venus

bedeuten.

---

*) Nicht zu verwechseln mit seinem älteren Bruder Guillaume Delisle, dem berühmten Geographen.

Da die Venusparallaxe auch in der unteren Konjunktion nur ca. 30″ (= 0,00015 in Teilen des Radius) und die Sonnenparallaxe noch nicht 9″ (= 0,000044 i. T. d. R.) umfaßt, so kann man die Produkte beider Parallaxen sowie ihre höheren Potenzen vernachlässigen. Da ferner der Sonnenradius ca. 16′ beträgt, so weicht

$$\cos \triangle$$

vom Augenblicke der ersten äußeren Berührung an nur um

$$\text{ca. } 0{,}00001$$

von der Einheit ab, so daß man unbedenklich

$$\sin \Pi \cos \triangle = \sin \Pi = \Pi$$

$$\text{und } \sin \pi \cos \triangle = \sin \pi = \pi$$

setzen darf. Durch alles dies vereinfacht sich, wenn man den Wurzelausdruck in eine Reihe entwickelt, unsere Fundamentalgleichung in die folgende:

$$\Pi - \pi = \frac{\cos \delta - \cos \triangle}{\varrho\,(\cos Z - \cos z)} \;\ldots\ldots\; \text{(I).}$$

Wir bemerken zunächst, daß diese Gleichung lediglich von der Differenz der Parallaxen abhängt, und die Folge wird lehren, daß man mittels der nachstehenden Methode zunächst auch nur diese Differenz zu finden vermag. Da man aber außerdem aus der Theorie der Venus- und Sonnenbahn für jede Zeit das Verhältnis

$$\frac{\Pi}{\pi}$$

mit ausreichender Genauigkeit kennt, so hat man

die Differenz und den Quotienten der Parallaxe, woraus dann sofort die Größen einzeln gefunden werden können.

Das Wesen der Delisle-Delambreschen Methode besteht nun darin, korrespondierende Phasen zweier Beobachtungsstationen — z. B. die ersten inneren Randberührungen — mit derselben Phase am Erdmittelpunkte zu vergleichen. Dadurch wird es möglich, die Bedingungsgleichung von den tabellarischen Fehlern, soweit dieselben einen schädlichen Einfluß ausüben können, frei zu machen, so daß die Bedingungsgleichung zum Schlusse nur noch die verbesserte Parallaxendifferenz enthält und also zu deren Bestimmung verwendet werden kann. Zur Erreichung dieses Zwecks

sind im ganzen die Beobachtungen von zwei Paaren korrespondierender Phasen erforderlich, z. B. der beiden inneren Berührungen an zwei Beobachtungsörtern.

Gesetzt nun, auf Grund der vorhandenen und jedenfalls schon ziemlich korrekten Planetentafeln habe man gefunden, daß

1) die geocentrische erste Berührung um T^h w. Z. des Hauptmeridians und
2) dieselbe Phase am ersten Beobachtungsorte um $T + \triangle T$ w. Z. des Hauptmeridians

stattfinde.

Bedeuten dann

$$D,\ A,\ d,\ a,\ R,\ r$$

die w a h r e n Werte der Äquatorialkoordinaten und Radien von Sonne und Venus zur Zeit T^h und

$$\varDelta,\ \mathcal{A},\ \delta,\ \alpha,\ R,\ r$$

die wahren Werte derselben Größen zur Zeit $T + \triangle T$; werden ferner durch

$$d\mathrm{d},\ d\mathrm{a},\ dR,\ dr,\ d\Pi,\ d\pi$$

die tabellarischen Fehler der entsprechenden Größen, sowie

durch m die Veränderung von d in einer Sekunde,
" m_1 " " " D " " "
" q " " " a " " "
" q_1 " " " A " " "

dargestellt, dann muß zur Zeit der ersten inneren Berührung am ersten Beobachtungsorte (φ, λ) nach Maßgabe der Gleichung (I) die Bedingung bestehen (indem man cos δ durch die Äquatorialkoordinaten ausdrückt):

$$\sin(\mathrm{d} + d\mathrm{d} + m . \triangle T) \sin(D + m_1 . \triangle T)$$
$$+ \cos(\mathrm{d} + d\mathrm{d} + m . \triangle T) \cos(D + m_1 \triangle T) \cos(\mathrm{a} + d\mathrm{a} + q . \triangle T - a_1 - q_1 . \triangle T) - \cos(R - r + dR - dr)$$
$$= \varrho \{\sin \varDelta \sin \varphi + \cos \varDelta \cos \varphi \cos s - \sin \delta \sin \varphi - \cos \delta \cos \varphi \cos(s + \mathcal{A} - \alpha)\}\ p,$$

wenn man zur Abkürzung die verbesserte Parallaxendifferenz

$$\Pi - \pi + d\Pi - d\pi \text{ mit } p$$

und die beobachtete wahre Ortszeit der scheinbaren ersten inneren Berührung

mit s

bezeichnet.

Bezüglich dieser Gleichung ist jedoch noch folgendes zu bemerken. Die Sonnenkoordinaten sind nach dem gegenwärtigen Standpunkte der Wissenschaft genau genug erforscht, um die etwaigen Fehler

$$dA, dD$$

in der vorstehenden Gleichung außer acht lassen zu können. Wollte man sie dennoch berücksichtigen, so würde dies an dem ganzen Verfahren nichts ändern, sondern die Rechnung nur etwas weitläufiger gestalten. —

Der Koefficient von p hängt zwar von Größen

$$\Delta, A, \delta, \alpha$$

ab, die sowohl mit den Fehlern der Tafeln als auch mit dem Fehler der Zeit $T + \triangle T$, auf welche sie sich beziehen, behaftet sind. Da indessen alle diese Fehler nur sehr unbedeutend sind und überdies mit der kleinen Größe $p = 0{,}0001$ multipliziert vorkommen, so können sie auf das Resultat keinen merklichen Einfluß ausüben; man darf sie demnach vernachlässigen. Ja, es würde selbst, namentlich bei einer ersten Rechnung, gestattet sein — wie dies auch in dem unten folgenden Rechnungsbeispiele geschehen —, statt der Koordinaten zur Zeit der scheinbaren Berührung die zur Zeit der wahren Berührung, also

$$A, D, a, d \text{ statt } A, \Delta, \alpha, \delta$$

beizubehalten, da hierdurch höchstens ein Unterschied von etwa 15″ eintreten kann, der in Verbindung mit $p = 0{,}0001$ nahezu verschwindet. — Ferner hat man sich in obiger Gleichung unter R, r die geocentrischen Werte vorzustellen, obgleich streng genommen die von Ort zu Ort veränderlichen scheinbaren Werte zu nehmen sind. Die Differenzen sind wegen der Kleinheit der Parallaxen und Halbmesser an sich nur äußerst geringfügig, fallen aber bei dem vorstehenden Verfahren, wie wir bald sehen werden, ganz außer Betracht. — Endlich mag noch daran erinnert werden, daß in der mehr erwähnten Gleichung der Buchstabe δ die Monddeklination bedeutet,

während früher — namentlich auch in Gleichung (I) — darunter die geocentrische Gestirnsdistanz verstanden war. Da letztere im weiteren Verlaufe der Methode nicht mehr erscheint, so ist eine Verwechselung nicht zu befürchten.

Entwickeln wir nun unsere Gleichung nach den kleinen Größen

$$d\mathrm{d},\ d\mathrm{a}\ \ldots.$$

und beachten, daß

$$\cos(R - r) = \sin D . \sin d + \cos D \cos d \cos(A - a),$$

so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
&\{\sin D \cos d - \cos D \sin d \cos(A - a)\}\, d\mathrm{d} \\
+ &\{\sin D \cos d . m + \sin d \cos D . m_1 - \sin d \cos D \cos(A - a)\, m \\
&- \cos d \sin D \cos(A - a)\, m_1 - \cos d \cos D \sin(A - A_1) \\
&(q - q_1)\} . \triangle T \\
- &\cos d \cos D \sin(A - a) . \triangle a \\
+ &\sin(R - r) . d(R - r) \\
- &\varrho\, \{\sin \varDelta \sin \varphi + \cos \varDelta \cos \varphi \cos s - \sin \delta \sin \varphi - \cos \delta \cos \varphi \\
&\cos(s + \mathcal{A} - \alpha)\} . p = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)},
\end{aligned}$$

wofür wir in abgekürzter Form schreiben:

$$M . d\mathrm{d} + N . \triangle T - P . d\mathrm{a} + \sin(R - r) . d(R - r) - Q . p = o \quad (\mathrm{II}_\alpha).$$

Eine nähere Betrachtung dieser Gleichung lehrt, daß die Koefficienten von

$$d\mathrm{d},\ \triangle T,\ d\mathrm{a},\ d(R - r),\ \text{also}$$
$$M,\ N,\ P \text{ und } \sin(R - r)$$

sich sämtlich auf die geocentrische erste innere Berührung beziehen, also für alle Örter konstant bleiben, wenn überall die scheinbaren ersten inneren Berührungen beobachtet worden sind.

An einer zweiten Beobachtungsstation wird man deshalb für dieselbe Phase erhalten:

$$M d\mathrm{d} + N . \triangle T_1 - P d\mathrm{a} + \sin(R - r)\, d(R - r) - Q_1 . p = o,$$

so daß durch Subtraktion der beiden Gleichungen folgt:

$$N(\triangle T - \triangle T_1) - (Q - Q_1)\, p = o.$$

Die scheinbare Berührung am ersten Beobachtungsort fand nach den Tafeln

um $T + \triangle T$ w. Z. des Hauptmeridians

statt; nach den Beobachtungen ereignete sich diese Berührung um s wahre Ortszeit. Bezeichnet man die hypothetische (noch mit einem kleinen Fehler behaftete) geographische Länge des Orts in Bezug auf den Hauptmeridian mit λ, dann entspricht jener scheinbaren Berührung also auch die Zeit

$s - \lambda$ im Hauptmeridiane, so daß

$$T + \triangle T = s - \lambda, \text{ oder}$$
$$\triangle T = s - \lambda - T$$

gesetzt werden kann.

In ähnlicher Weise findet man:

$$\triangle T_1 = s_1 - \lambda_1 - T, \text{ wodurch}$$
$$\triangle T - \triangle T_1 = (s - s_1) - (\lambda - \lambda_1) \text{ wird.}$$

Damit nimmt aber die obige Gleichung die Form an:

$$N \{(s - s_1) - (\lambda - \lambda_1)\} - (Q - Q_1)\, p = 0 \, . \, . \, . \, . \, . \, (\mu)$$

Finden nun die zweiten inneren Berührungen an den beiden Beobachtungsstationen zu den tabellarischen Zeiten des Hauptmeridians

$$T^0 + \triangle T^0$$
$$T^0{}_1 + \triangle T^0{}_1$$

und zu den beobachteten Ortszeiten

$$s + \triangle s$$
$$\text{und } s_1 + \triangle s_1$$

statt, dann führt die Verbindung beider Beobachtungen zu der analogen Gleichung:

$$N_1 \{(s + \triangle s - s_1 - \triangle s_1) - (\lambda - \lambda_1)\} - (Q_2 - Q_3)\, p = 0 \, . \, . \, . \, (\varkappa).$$

Wird endlich die Gleichung (μ) mit N_1 und die Gleichung $(\varkappa)$ mit N multipliziert, so folgt durch Subtraktion:

$$N \, . \, N_1 (\triangle s - \triangle s_1) = \{N (Q_2 - Q_3) - N_1 (Q - Q_1)\}\, p, \text{ oder:}$$

$$p = \frac{\triangle s - \triangle s_1}{\frac{Q_2 - Q_3}{N_1} - \frac{Q - Q_1}{N}} \, . \, . \, . \, . \, . \, (III).$$

Wir haben damit die gesuchte Bestimmungsgleichung für die verbesserte Parallaxendifferenz

$$p = \Pi + d\Pi - \pi - d\pi.$$

Sie ist von den Fehlern der Planetentafel unabhängig. Wenigstens ist der in den tabellarischen Größen

$$Q, Q_1, Q_2, Q_3, N, N_1$$

enthaltene Fehler auf das Endergebnis, wie oben nachgewiesen, ohne Einfluß. Vorausgesetzt wird nur eine äußerst genaue Beobachtung der

Größen $\triangle s$ und $\triangle s_1$,

welche, unserer Annahme gemäß, die Zeiträume zwischen den zwei inneren Berührungen an den beiden Beobachtungsstationen darstellen. Daß man als solche zwei Örter wählt, an welchen diese Zeiträume einen möglichst verschiedenen Wert haben, versteht sich von selbst, da das Resultat desto mehr an Zuverlässigkeit gewinnt, je größer die Differenz

$$\triangle s - \triangle s_1.$$

Auch wird man leicht bemerken, daß die vorliegende Methode sich gleichfalls auf die

Ungleichheit der Dauer der Erscheinung

stützt. Nur kommt hier infolge einer sinnreichen Kombination der Bedingungsgleichungen die abgesonderte Betrachtung des Einflusses der Erdrotation in Wegfall.

Um dem Leser das Verständnis des folgenden Rechnungsbeispiels zu erleichtern, werde hier nochmals kurz an die Bedeutung der in der Gleichung (III) gebrauchten Abkürzungen erinnert.

Im allgemeinen ist:

$$Q = \varrho \{\sin \varDelta \sin \varphi + \cos \varDelta \cos \varphi \cos s - \sin \delta \sin \varphi$$
$$- \cos \delta \cos \varphi \cos (s + \varDelta - \alpha)\}$$

und

$$N = \sin D \cos d . m + \sin d \cos D . m_1 - \sin d \cos D \cos (A - a) m$$
$$- \cos d \sin D \cos (A - a) . m_1 - \cos d \cos D \sin (A - A_1) (q - q_1).$$

Im besondern ist:

Q derjenige Wert jenes Ausdrucks, welcher der ersten inneren Berührung am Orte (φ, λ) entspricht,

Q_1 der Wert, welcher derselben Berührung am Orte (φ_1, λ_1) zugehört,

Q_2 der der zweiten inneren Berührung am Orte (φ, λ) und

Q_3 der der zweiten inneren Berührung am Orte (φ_1, λ_1) zukommende Wert,

ferner

N der an beiden Orten der ersten inneren Berührung,

N_1 der an beiden Orten der zweiten inneren Berührung angemessene Wert jenes allgemeinen Ausdrucks.

Rechnungsbeispiel.

Venusdurchgang vom 3. Juni 1769.

Die beiden der Rechnung zu Grunde liegenden Phasen sind die erste innere und die zweite äußere Berührung, so daß in den vorhergehenden Entwickelungen die letztere Phase überall an Stelle der zweiten inneren Berührung tritt.

Die zwei Beobachtungsstationen sind:

1) Kajaneburg: $\varphi = 64^0\ 13'$
hypoth. $\lambda = 1^h\ 41^m\ 39^s$ östl. v. Paris

2) Tahiti: $\varphi_1 = -\ 17^0\ 29'$
hypoth. $\lambda_1 = 10^h\ 17^m\ 22^s$ westl. v. Paris.

In Kajaneburg wurde beobachtet:

erste innere Berührung um $s^h = 9^h\ 20^m\ 46^s$ w. Ortszeit,
zweite äußere Berührung um $s + \triangle s = 15^h\ 32^m\ 26^s$ w. Ortszeit,

in Tahiti:

erste innere Berührung um $s^h_1 = 21^h\ 44^m\ 4^s$ w. Ortszeit,
zweite äußere Berührung um $s_1 + \triangle s_1 = 27^h\ 32^m\ 8^s$ w. Ortszeit.

Also:

$$\triangle s - \triangle s_1 = 1416^s.$$

Nach den Tafeln ist:

3. VI. 1769	a ♀	d ♀	A ⊙	D ⊙
$10^h\ 15^m\ 2^s$ w. Par. Z.	$72^0\ 2'\ 10'',1$	$+ 22^0\ 36'\ 48'',0$	$72^0\ 3'\ 32'',8$	$+ 22^0\ 26'\ 29'',2$
$11^h\ 15^m\ 2^s$	$72^0\ 0'\ 33'',6$	$+ 22^0\ 36'\ 1'',0$	$72^0\ 6'\ 7'',0$	$+ 22^0\ 26'\ 46'',8$

Also:

Zeit der geocentrischen Konjunktion in AR (a = A): $9^h\ 55^m\ 17^s,0$
w. Par. Zeit.

In diesem Augenblicke ist:

$$a = A = 72^0\ 2'\ 41'',9$$
$$d = 22^0\ 37'\ 3''\ 7$$
$$D = 22^0\ 26'\ 23'',4.$$

Ferner nach den Tafeln:

$\Pi(♀) = 30'',25$	$\pi(\odot) = 8'',6$
$r = 28'',6$	$R = 947'',2$
$q = -\frac{96'',5}{3600}$	$q_1 = +\frac{154'',2}{3600}$
$m = -\frac{47''}{3600}$	$m_1 = +\frac{17'',6}{3600}$

Die geocentrische Rechnung liefert:

erste innere Berührung um $7^h\ 48^m\ 21^s,1$
zweite äußere Berührung um $13^h\ 46^m\ 39^s,3.$

Die Zeiten dieser geocentrischen Phasen unterscheiden sich von den korrespondierenden Phasen der beiden Beobachtungsstationen nur um wenige Minuten. Es sind deshalb im Folgenden, zur Abkürzung der Rechnung, die Koefficienten Q, welche streng genommen den Phasenzeiten der Beobachtungsstationen entsprechen, den geocentrischen Zeiten gemäß bestimmt worden. Wegen des sehr kleinen Faktors $\Pi - \pi$ ist die hieraus hervorgehende Differenz im Resultate kaum merklich.

Für die Zeiten der beiden erwähnten geocentrischen Phasen ist nun:

	a	d	A	D
$7^h\ 48^m\ 21^s,1$	$72^0\ 6'\ 6''$	$22^0\ 38'\ 43'',1$	$71^0\ 57'\ 16''$	$22^0\ 25'\ 46'',6$
$13^h\ 46^m\ 39^s,3$	$71^0\ 56'\ 29'',8$	$22^0\ 34'\ 2'',5$	$72^0\ 12'\ 36'',7$	$22^0\ 27'\ 31'',1$

Mit den vorstehenden Werten ergiebt sich

für die erste innere Berührung in Kajaneburg:

$$\left.\begin{array}{l} \sin d \sin \varphi = 0{,}3466942 \\ \sin D \sin \varphi = 0{,}3435633 \\ \cos d \cos \varphi \cos (s + A - a) = -0{,}3077177 \\ \cos D \cos \varphi \cos s = -0{,}3088612 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Hieraus} \\ Q = -0{,}0042744 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin D \cos d . m = -0{,}0045973 \\ \cos D \sin d . m_1 = 0{,}0017399 \\ \sin d \cos D \cos (A - a) . m = -0{,}0046464 \\ \cos d \sin D \cos (A - a) . m_1 = 0{,}0017215 \\ \cos d \cos D \sin (a - A)\, (q - q_1) = -0{,}0001526 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Hieraus} \\ N = +0{,}0002201 \end{array}$$

für die erste innere Berührung in Tahiti:

$$\left.\begin{array}{l} \sin D \sin \varphi_1 = -0{,}1146277 \\ \cos D \cos \varphi_1 \cos s_1 = 0{,}7310628 \\ \sin d \sin \varphi_1 = -0{,}1156725 \\ \cos d \cos \varphi_1 \cos (s_1 + A - a) = 0{,}7286549 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Hieraus} \\ Q_1 = +0{,}0034527 \end{array}$$

für die zweite äußere Berührung in Kajaneburg (durch Berechnung der analogen Ausdrücke für die Zeit dieser Phase):

$$Q_2 = -0{,}0032769$$
$$N_1 = -0{,}00024425$$

für die zweite äußere Berührung in Tahiti:

$$Q_3 = +0{,}0042485$$

Schließlich:

$$p = \frac{1416}{\frac{752540}{24425} + \frac{77271}{2201}} = 21'', 5 = \Pi - \pi$$

und da nach den Tafeln

$$\frac{\pi}{\Pi - \pi} = 0{,}39791, \text{ so folgt:}$$

Parallaxe der Sonne $= \pi = 0{,}39791 . 21'', 5$
$= 8'', 55.$

Anmerkung 1. Der Vorzug des vorstehenden, von dem üblichen nicht unerheblich abweichenden Verfahrens besteht darin, daß dasselbe sich an eine zunächst mathematisch genaue und nur zur leichteren Ausführung der ersten Rechnung vereinfachte Gleichung sowie unmittelbar an die geocentrischen Koordinaten anschließt. Man hat es dadurch in seiner Gewalt, die Bestimmung des definitiven Werts der Parallaxe - durch nachträgliche Zuziehung der vernachlässigten Glieder und Faktoren — bis zu jedem beliebigen Grade von (mathematischer) Genauigkeit zu treiben. Die Berücksichtigung der bis dahin außer acht gelassenen kleinen Größen höherer Ordnung geschieht am einfachsten dadurch, daß man ihre Werte auf Grund der bereits nahezu genauen Nährungswerte der Elemente ermittelt und in die Gleichungen einführt. Um den Einfluß der Erdabplattung in Betracht zu ziehen, hat man nur nötig, den den betreffenden Beobachtungsstationen entsprechenden Wert des Erdradius ϱ in die Gleichung (I) einzusetzen und in der Folge den geographischen Breiten überall die geocentrischen Breiten zu substituieren.

Anmerkung 2 (Korrektion der Venus- und Merkurtafeln). Das oben ausführlich dargelegte Verfahren dient zunächst nur zur Korrektion der Parallaxendifferenz von Sonne und Venus, und diese Verbesserung ist überhaupt als der vornehmste Zweck, den man bei Beobachtung der Venusdurchgänge verfolgt, zu betrachten. Zwar hat man das Planetensystem im ganzen wie in den geringfügigsten Einzelnheiten durchforscht; allein man besitzt gleichwohl nur ein relativ genaues Bild des Systems, dessen absoluter Maßstab nicht gänzlich fehlt, aber doch noch nicht mit unanfechtbarer Sicherheit bekannt ist. Dieser Maßstab ist eben die absolute Entfernung der Sonne von der Erde, d. h. die Sonnenparallaxe — und darin liegt die hohe Bedeutung einer genauen Bestimmung derselben für unsere gesamte Naturerkenntnis.

Neben diesem Hauptzwecke erscheint die Berichtigung der Tafeln der Venus aus den Beobachtungen ihrer Durchgänge von mehr untergeordneter Bedeutung. Immerhin wird man selbstverständlich die Gelegenheit nicht vorübergehen lassen, die Beobachtungen auch nach dieser Seite hin zu verwerten. Doch haben wir um so weniger Anlaß,

auf diesen Punkt hier näher einzugehen, als die Methode, deren man sich zu dem Ende bedient, auf denselben Grundsätzen beruht, wie das oben bei Besprechung der Anwendung der Sonnenfinsternisse (S. 76 u. s. f.) in allgemeinen Zügen entwickelte Verfahren.

Daß die Beobachtung der Merkurdurchgänge, wegen der erheblich größeren Entfernung dieses Planeten von der Erde, zur Ermittelung der Sonnenparallaxe nur wenig geeignet erscheint, ist schon früher erwähnt worden. Doch sind diese Durchgänge — deren Berechnung übrigens ganz analog der der Venusdurchgänge erfolgt — wenigstens für die Verbesserung der Merkurtafeln von einem nicht zu unterschätzenden Werte.

Sechster Abschnitt.

Die Bahnen der Meteorschwärme.

1. Allgemeines.

Wir hoffen den Wünschen vieler unserer Leser entgegenzukommen, wenn wir, am Schlusse der theorischen Astronomie angelangt, dasjenige Problem noch einer kurzen Betrachtung unterwerfen, welches gerade in neuerer Zeit das Interesse der Astronomen vielfach auf sich lenkt, nämlich

die Berechnung der Bahnen der Meteorringe.

Selbstredend müssen wir uns, dem Plane dieses Buches gemäß, auf eine Darstellung der wesentlichsten Gesichtspunkte beschränken.

Bei dem heutigen Stande unserer astronomischen Kenntnisse dürfte diejenige Ansicht wohl die größte Wahrscheinlichkeit für sich haben, nach welcher weder die Sternschnuppen noch die Kometen als autochthone Glieder unseres Sonnensystems zu betrachten sind. Regellos im unendlichen Weltraume umherirrend, geraten einige dieser kosmischen Massen in das Anziehungsgebiet der Sonne, werden infolgedessen von ihrem Wege abgelenkt, umkreisen die Sonne in einem mächtigen Kurvenbogen, um sich dann von neuem in den endlosen Raum zu verlieren. Nur in vereinzelten Fällen werden Sternschnuppenschwärme und Kometen — wahrscheinlich unter Mitwirkung größerer Planeten — dauernd dem Sonnensysteme einverleibt und beschreiben dann, gleich den Planeten, geschlossene, elliptische Bahnen um unseren Centralkörper. Was zunächst die Sternschnuppen betrifft, so lehrt eine mehr als tausendjährige Erfahrung, daß dieselben an bestimmten Tagen des Jahrs in be-

sonderer Häufigkeit die Atmosphäre unserer Erde durchschneiden. So ergießt sich namentlich gegen den 10. August und den 12. November alljährlich ein dichterer Sternschnuppenregen über die Erdoberfläche. Den ersteren nennt man den Augustschwarm, im Volksmunde die Thränen des heil. Laurentius, auch wohl die Perseiden, weil er aus dem Sternbilde Perseus herzukommen scheint; den letzteren den Novemberschwarm und, weil für ihn das Sternbild des Löwen den scheinbaren Ausgangspunkt bildet, auch die Leoniden. Die Periodicität dieser Schwärme ist nur dadurch zu erklären, daß sie in einem geschlossenen elliptischen Ringe von konstanter Lage und Ausdehnung sich um die Sonne bewegen. Der Perseidenring durchschneidet die Bahn der Erde an der Stelle, wo dieselbe sich am 10. August befindet, der Leonidenring dort, wo die Erde gegen den 12. November ankommt. — Höchst glanzvoll zeigt sich nach den Beobachtungen des amerikanischen Astronomen H. A. Newton die Erscheinung der Leoniden in Pausen von 33,25 Jahren (zuletzt 1866—67), woraus man schließt, daß dann eine Stelle des Rings von besonderer Dichtigkeit die Erdbahn durchschneidet. Dieser Zeitraum von $33^1/_4$ Jahren würde demnach zugleich als die Umlaufszeit des Novemberschwarms zu betrachten sein.

Außerdem aber lassen die Beobachtungen noch einen merkwürdigen Zusammenhang zwischen den regelmäßigen Meteorschwärmen und gewissen Kometen deutlich erkennen. So hat man die Bahnelemente des Kometen 1862. III als nahezu übereinstimmend mit den Bahnelementen der Perseiden und die Bahnelemente des Kometen 1866. I als fast einerlei mit den Elementen der Leoniden gefunden. Hiernach ist an einer engeren physischen Verbindung der beiden Ringe mit den betreffenden Kometen kaum zu zweifeln.

Durch diese und die früher erwähnten Thatsachen gewinnt nun überhaupt die Meinung derer eine Stütze, welche in jedem solchen Ringe nur Fragmente eines Kometen erblicken, die sich allmählich von demselben abgesondert haben, aber fortfahren, mit ihm die gleiche Bahn um die Sonne zu beschreiben.

Die wichtigsten Aufschlüsse über diesen Zusammenhang zwischen

Meteorströmen und Kometen verdankt man in neuerer Zeit dem Mailänder Astronomen Schiaparelli, sowie Weiß u. a.

Die Beobachtungen, auf welche sich die Bahnberechnung der Sternschnuppen zu gründen hat, sind wegen der sehr rasch verlaufenden, meist nur wenige Sekunden umfassenden Dauer ihrer Erscheinung mit besonderen Schwierigkeiten verbunden. Im allgemeinen kommt es darauf an, die Höhe und das Azimut der Sternschnuppe in den beiden genau bestimmten Momenten ihres Aufleuchtens und ihres Erlöschens festzustellen.

Der Weg der Sternschnuppe während der Dauer ihrer Sichtbarkeit liegt innerhalb der Atmosphäre — da erst mit dem Eintritt in dieselbe das Erglühen erfolgt — und darf als geradlinig angenommen werden. Aus der geographischen Breite des Beobachtungsorts, den Sternzeiten des Aufleuchtens und Erlöschens sowie den Höhen und den Azimuten der Sternschnuppe zu diesen beiden Zeiten lassen sich dann leicht auch

die Rektascensionen und Deklinationen der Sternschnuppe am Anfange und Ende ihres sichtbaren Wegs herleiten.

Die Bewegungsrichtung aller an demselben Tage beobachteten Sternschnuppen eines Schwarms ist durch die Tangente ihrer kosmischen Bahn gegeben. Die der Beobachtung unterworfenen Wege dieser Meteore sind mithin als parallel zu betrachten, und da sie sämtlich die Erde, bzw. ihre Atmosphäre treffen oder doch streifen, so liegen sie alle in demselben Durchmesser des scheinbaren Himmelsgewölbes. Denken wir uns die Erde zunächst ohne fortschreitende Bewegung, dann wird sich dieser Durchmesser von jedem Beobachtungsorte aus als ein größter Kreis darstellen, und alle diese, lediglich infolge der Parallaxe (des veränderten Standpunkts) verschiedenen Kreise werden sich in denselben zwei Punkten, den Endpunkten jenes Durchmessers, begegnen.

Nun befindet sich aber die Erde in einer progressiven Bewegung mit einer Geschwindigkeit, welche sich hinsichtlich ihrer Größe der Bahngeschwindigkeit der Meteore vergleichen läßt. Dieser Umstand bewirkt eine der Aberration ähnliche Verschiebung jenes Durchmessers

und zwar eine konstante Verschiebung, da die Erde sich während der Dauer der Beobachtungen gleichfalls in derselben Richtung und mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegt. Die aus der absoluten Bewegung der Meteore und der Erdbewegung resultierenden, den Beobachtungen allein zugänglichen relativen Bahnen der Meteore dürfen deshalb ebenfalls als parallel und mit einem und demselben Himmelsdurchmesser zusammenfallend betrachtet werden. Also schneiden sich auch alle an demselben Orte oder von verschiedenen Beobachtungsstationen aus gesehenen (scheinbaren) relativen Bahnen in zwei Punkten der Sphäre. Diese beiden Punkte werden Radiationspunkte genannt, und zwar heißt derjenige Punkt, von dem aus die Meteore herzukommen scheinen, der Divergenzpunkt, derjenige, nach dem sie hinzustreben scheinen, der Konvergenzpunkt.

Das Problem der Berechnung der Meteorbahnen zerfällt der Natur der Sache nach in drei Abschnitte:

a) in die Berechnung der geocentrischen Entfernung des Meteors,
b) in die Bestimmung der Radiationspunkte,
c) in die Berechnung der Bahnelemente des Meteors.

2. Die geocentrische Entfernung des Meteors.

Ein Meteor S (Fig. 23) ist gleichzeitig von zwei Stationen O

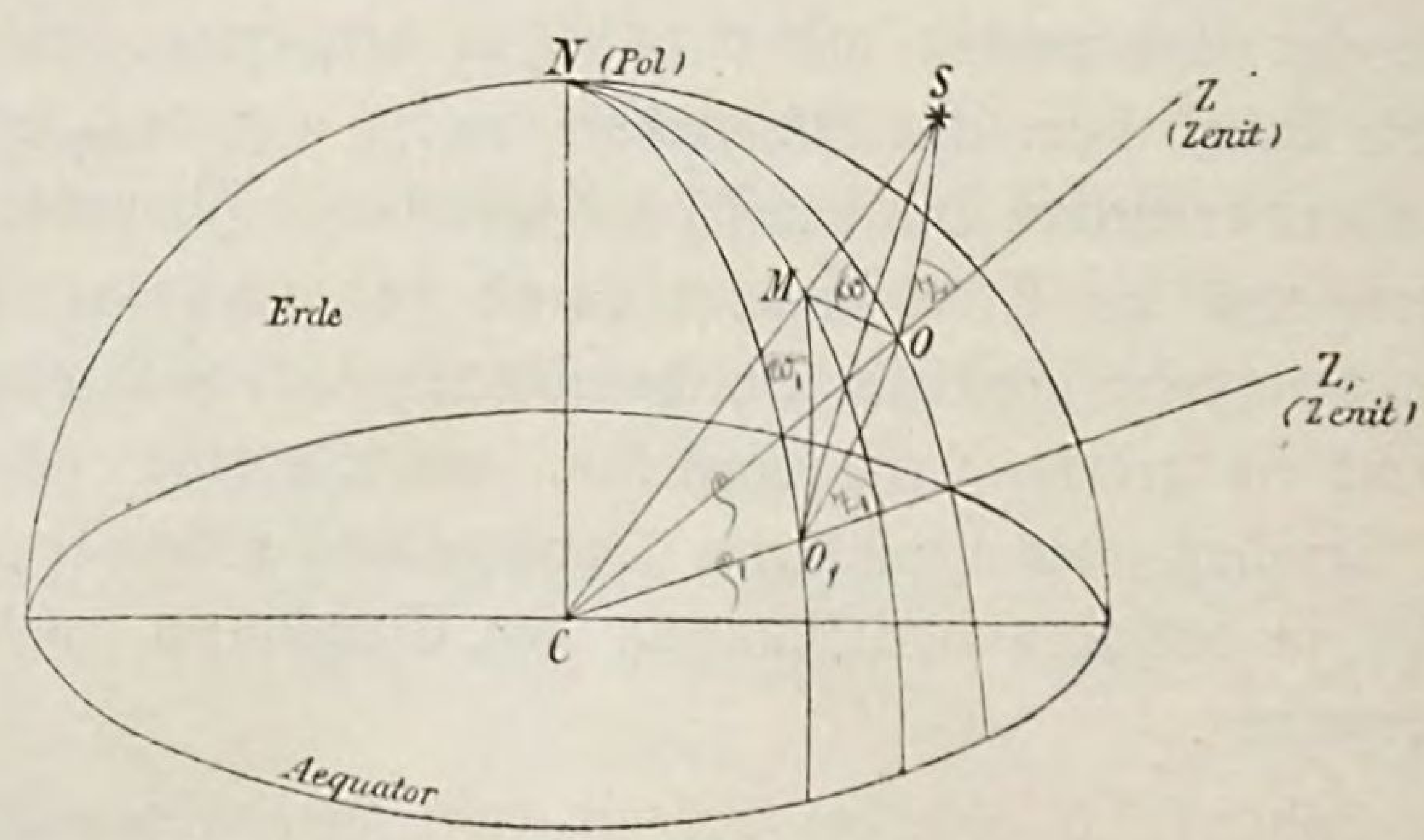


Fig. 23.

und O_1 aus, deren geographische Koordinaten bekannt sind, beobachtet worden. Man fand:

am Orte O die Zenitdistanz $SOZ = z$,
Azimut $NOM = \omega$,
am Orte O_1 die Zenitdistanz $SO_1Z_1 = z_1$,
Azimut $MO_1N = \omega_1$,

wenn man hier unter Azimut gewisse, durch Beobachtung gefundene, nach Osten oder Westen gezählte Winkel mit der Mittagslinie versteht.

Gesucht: die Entfernung SC des Meteors vom Erdmittelpunkte.

Bevor wir zur Auflösung schreiten, müssen wir jedoch noch einige Bemerkungen an die Data der Aufgabe anknüpfen. Da wir dieselbe für die sphäroidische Erde behandeln wollen, die unmittelbaren Beobachtungen aber nur die Zenitdistanzen in Bezug auf das geographische Zenit liefern, so setzen wir voraus, daß die Differenzen

$$z \text{ und } z_1$$

bereits auf die geocentrischen Zenite Z und Z_1 (vgl. sphär. Astr., p. 32) reduciert sind.

Eine ähnliche Bewandtnis hat es mit den Azimuten, die wir der leichteren Verständigung wegen oben durch

$$NOM \text{ und } NO_1M$$

bezeichnet haben, obwohl auf der sphäroidischen Erde die Bogen

$$NO\,,\ NO_1\,,\ MO\,,\ MO_1$$

nicht mehr größten Kreisen angehören. Wir nehmen auch hier an, man habe die unmittelbar beobachteten Azimute bereits (s. Fig. 7 der sph. Astr.) auf das geocentrische Zenit zurückgeführt. Es muß deshalb streng genommen gesagt werden: Man kennt durch reducierte Beobachtungen den Neigungswinkel der Ebene SOZ oder SCZ mit der Meridianebene NCO, sowie den Neigungswinkel der Ebene SO_1Z_1 oder SCZ_1 mit der Meridianebene NCO_1.

Endlich setzen wir voraus, die geographischen Breiten der Stationen O und O_1 seien mit Hilfe der Tabelle III der „Nachträge" durch ihre geocentrischen Breiten (d. h. die Neigungswinkel der Zenitlinien CZ und CZ_1 gegen die Ebene des Äquators) ersetzt und die den beiden Stationen O und O_1 entsprechenden Erdradien

$$\varrho \text{ und } \varrho_1$$

mit Zuziehung der Tabelle IV der „Nachträge" berechnet worden.

Allen diesen Verhältnissen tragen wir am leichtesten Rechnung, wenn wir im Folgenden den sphärischen Dreiecken überall die entsprechenden Dreikante substituieren, d. h. seine Kantenwinkel den Seiten und die Neigungswinkel seiner Ebenen den Winkeln des sphärischen Dreiecks.

Auflösung.

In dem Dreikante

$$NCZZ_1$$

kennt man die beiden Kantenwinkel

NCZ = Komplement der geoc. Breite von O

NCZ_1 = " " " " " O_1,

sowie den Neigungswinkel der beiden Meridianebenen NCZ und NCZ_1, welcher offenbar mit der Differenz der geographischen Längen zusammenfällt.

Wir können demnach berechnen:

1) die Neigungswinkel derselben zwei Meridianebenen gegen die Ebene der Zenitlinien CZ und CZ_1, welche wir der Kürze wegen durch

NOO_1 und NO_1O (s. Fig. 23)

ausdrücken wollen,

2) den Winkel ZCZ_1 der zwei Zenitlinien.

Da wir nun auch aus den Beobachtungen (s. oben) die Neigungswinkel der beiden Meridianebenen gegen die Ebenen SCZ und SCZ_1, also die Winkel NOM und NO_1M kennen, so liefern die Differenzen der beiden Paare von Neigungswinkel alsbald die Neigungswinkel der Ebene

$$ZCZ_1$$

gegen die Ebenen der Vertikalkreise

SCZ und SCZ_1, also die Winkel MOO_1 und MO_1O.

Wir haben mithin im Dreikante

$$SCZZ_1$$

den Kantenwinkel ZCZ_1 sowie die beiden anliegenden Neigungswinkel und finden schließlich aus ihnen die beiden

Kantenwinkel SCZ und SCZ_1,

d. h. die sogenannten geocentrischen Zenitdistanzen des Meteors.

Hiernach ist es nun sehr leicht, die geocentrische Entfernung SC des Meteors aus einem der ebenen Dreiecke SCO oder SCO_1 zu bestimmen, in denen je eine Seite (ϱ oder ϱ_1) und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind.

Bezeichnet man die geographischen Längen der Stationen O und O_1 bzw.

$$\text{mit } \lambda \text{ und } \lambda_1,$$

sowie ihre geocentrischen Breiten mit

$$\varphi \text{ und } \varphi_1,$$

dann gestaltet sich — unter dem bereits oben gemachten Vorbehalte, daß die verschiedenen Bogen NO, NO_1 u. s. f. im folgenden Bogen größter Kreise darstellen — die Rechnung in nachstehender Weise:

1) $\cos ZCZ_1 = \cos OO_1 = \sin\varphi \sin\varphi_1 + \cos\varphi \cos\varphi_1 \cos(\lambda - \lambda_1)$,

2) $\cos NOO_1 = \dfrac{\sin\varphi_1 - \sin\varphi \cos OO_1}{\cos\varphi \,.\, \sin OO_1}$,

3) $\sin NO_1O : \sin NOO_1 = \sin\varphi : \sin\varphi_1$,

4) $\sphericalangle MO_1O = NO_1O - \underset{\omega}{NO_1M}$, wo der letztere Winkel durch die Beobachtungen bekannt ist,

5) $\sphericalangle MOO_1 = NOO_1 - \underset{\omega}{NOM}$,

6) $\cot MOO_1 \sin MO_1O + \cos MO_1O \cos OO_1 = \cot MO_1 \,.\, \sin OO_1$.

Nachdem durch die letzte Gleichung der Winkel

$$MO_1 = SCZ_1$$

gefunden, ergiebt sich die gesuchte Entfernung

$$SC = R = \varrho_1 \frac{\sin z_1}{\sin(z_1 - SCZ_1)}.$$

Anmerkung 1.

Ein Blick auf die vorstehende Rechnung lehrt, daß die Zenitdistanz z überhaupt nicht zur Verwendung gekommen ist, demnach eine der Zenitdistanzen als ein überschüssiges Datum der Aufgabe be-

trachtet werden muß. Man wird sich deshalb der zweiten Zenitdistanz als Kontrolle bedienen können. Stimmt der Wert von R, welchen man aus z_1 erhält, überein mit dem aus z, dann darf man dies als einen Beweis für die Korrespondenz beider Beobachtungen ansehen, d. h. als einen Beweis dafür, daß beidemal dasselbe Meteor und in demselben Zeitmomente beobachtet wurde.

Anmerkung 2.

Man wird leicht bemerken, daß das vorstehende Verfahren auch bei Lösung anderer Aufgaben Verwendung finden kann. Stellt z. B. S (s. Fig. 23) den Mond oder Mars dar, dann läßt sich nach dieser Methode

die Parallaxe dieser Himmelskörper

aus nicht meridionalen korrespondierenden Beobachtungen herleiten. Von diesem Gesichtspunkte aus läßt sich das Verfahren als eine Verallgemeinerung des in der sphär. Astr. kennengelernten betrachten. Hier wurden die geographischen Längen der Stationen als gleich und die Zenitdistanzen als meridional vorausgesetzt.

1. Rechnungsbeispiel
(für die sphärische Erde: $\varrho = 1$ u. s. f.).

Ein Phänomen S (s. Fig. 23) wurde an einem Orte O_1, dessen geographische Breite $\varphi_1 = 49^0\ 46'\ 6''$, in einer Zenitdistanz $z_1 = 86^0$ und einem Azimute $\omega_1 = 92^0\ 48'\ 25''$ beobachtet. Am Orte O, dessen Breite $\varphi = 49^0\ 8'\ 26''$, betrug die Zenitdistanz $z = 85^0$ und das Azimut $\omega = 45^0$. Die geographische Längendifferenz beider Stationen war $2^0\ 6'\ 17''$. Gesucht die Entfernung des Punkts S vom Mittelpunkte der Erde in Teilen ihres Halbmessers.

Auflösung.

Man findet durch die obige Rechnung:

wahre Zenitdistanz von $S = SCZ_1 = 0^0\ 51'\ 39''$.

Entfernung vom Erdmittelpunkte $= SC = R = \frac{\sin 86^0}{\sin 85^0\ 8'\ 21''}$

$= 1{,}001165$ Erdhalbmesser.

2. Rechnungsbeispiel.

Ein Meteor wurde gleichzeitig in Berlin und Breslau beobachtet.

Berlin		Breslau	
Geogr. Breite	$= 52^0\ 20'$	Geogr. Breite	$= 51^0\ 6',9$
Geoc. Breite	$= 52^0\ 8',1$	Geoc. Breite	$= 50^0\ 55',7$
$\log \varrho_1$	$= 9,9991$	$\log \varrho_1$	$= 9,9991$
Sternzeit d. Beob.	$= 5^h\ 2^m\ 31^s$	Sternzeit d. Beob.	$= 5^h\ 17^m\ 0^s$
Rektasc. d. Meteors	$= 136^0$	Rektasc. d. Meteors	$= 160^0$
Dekl. „ „	$= +\ 3^0$	Dekl. „ „	$= +\ 40^0$

Also geogr. Längendifferenz $= 14^m\ 29^s$.

Berechnet man aus den vorstehenden Angaben zunächst die Horizontkoordinaten, dann ergiebt sich für

R

der Wert 1,010 oder 1,012, je nachdem man den einen oder anderen Wert der Zenitdistanz als Grundlage der Rechnung nimmt. Dieser Widerspruch kann teils aus einer Mangelhaftigkeit der Beobachtungen entspringen, teils daher rühren, daß das Aufleuchten — auf welches sich die obigen Beobachtungen beziehen — nicht in demselben absoluten Zeitmomente wahrgenommen wurde. Die Möglichkeit der gleichzeitigen Beobachtung eines Meteors setzt nämlich voraus, daß dasselbe in allen Punkten seiner Oberfläche (nach allen Richtungen hin) gleichzeitig zu glühen beginnt — was nicht immer der Fall zu sein scheint. Auch in dem vorliegenden Beispiele ist die zeitliche Korrespondenz der Beobachtungen keineswegs eine absolut befriedigende, obwohl die Differenz der Sternzeiten genau gleich ist der geogr. Längendifferenz. Denn diese Übereinstimmung ist nur eine künstliche, indem die Beobachtungszeiten ursprünglich um eine nicht unbeträchtliche Anzahl von Sekunden differierten und erst nachträglich den geogr. Längen gemäß geändert worden sind.

3. Die sphärischen Örter der Radiationspunkte.

In Figur 24 stelle C den Erdmittelpunkt, AE den sichtbaren Weg des Meteors dar und zwar A den Punkt des Aufleuchtens, E den des Erlöschens. Die Halbkugel bezeichne die eine Hemisphäre des

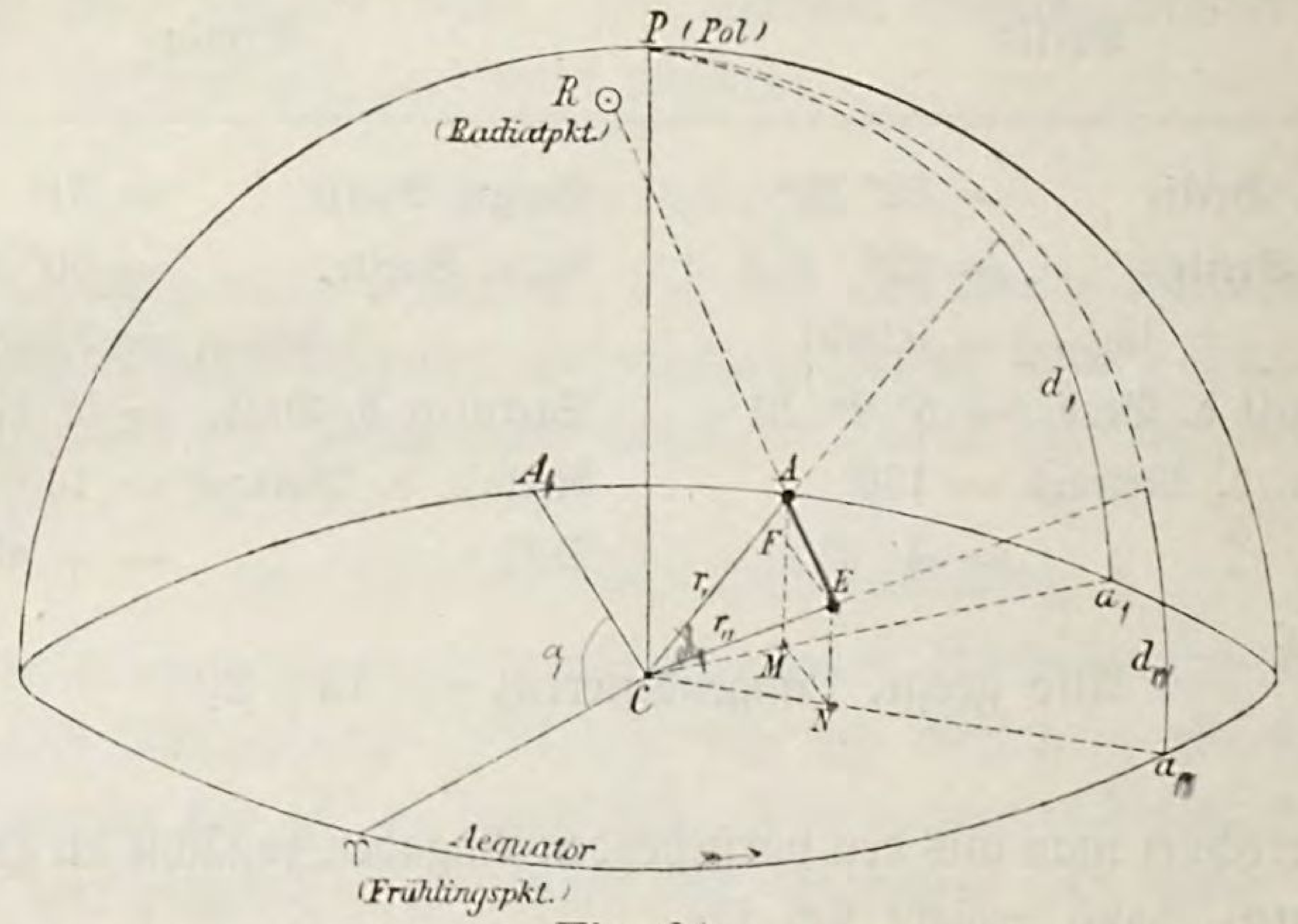


Fig. 24.

Himmels. Dieselbe wird von der Meteorbahn AE im Punkte R getroffen, der mithin den Radiationspunkt der Divergenz angiebt, da das Meteor von R herzukommen scheint. Unsere Aufgabe geht nun dahin:

die Deklination D_1
und die Rektascension A_1

zunächst dieses einen Radiationspunkts — dem der Radiationspunkt der Konvergenz diametral gegenüberliegt — zu bestimmen.

Nach dem Vorhergehenden dürfen wir die geocentrischen Polarkoordinaten in Bezug auf den Äquator

$$\left.\begin{array}{r} CA = r_{,} = \text{Radiusvektor} \\ \sphericalangle\ \Upsilon\, Ca_{,} = a_{,} = \text{Rektascension} \\ \sphericalangle\ ACM = d_{,} = \text{Deklination} \end{array}\right\} \text{des Punkts A}$$

$$\left.\begin{array}{r} CE = r_{,,} \\ \sphericalangle\ \Upsilon\, Ca_{,,} = a_{,,} \\ \sphericalangle\ ECN = d_{,,} \end{array}\right\} \text{des Punkts E}$$

als bekannt voraussetzen.

Denken wir uns durch den Erdmittelpunkt C eine Parallele zur Meteorbahn AE gelegt, dann schneidet auch diese die Himmelssphäre in den Radiationspunkten, da die Entfernung der AE vom Erdcentrum neben der unermeßlichen Ausdehnung der Fixsternsphäre verschwindet.

Bezeichnet demnach MN die senkrechte Projektion der Meteorbahn AE auf den Äquator und liegt die CA, der MN parallel, dann mißt der Winkel

$$\Upsilon\, C A_{,}\,,$$

in der Richtung der wahren täglichen Bewegung gezählt, die gesuchte Rektascension $A_{,}$ des Divergenzpunkts, während der Neigungswinkel der AE gegen die Äquatorebene mit der Deklination $D_{,}$ dieses Punkts zusammenfällt.

Mit Zuziehung der Figur findet man aber leicht:

1) $$\operatorname{tg} D_{,} = \frac{AF}{FE} = \frac{AM - EN}{MN}$$

$$= \frac{r_{,,} \sin d_{,,} - r_{,} \sin d_{,}}{\sqrt{r_{,}^2 \cos^2 d_{,} + r_{,,}^2 \cos^2 d_2 - 2\, r_{,}\, r_{,,} \cos d_{,} \cos d_{,,} \cos (a_{,} - a_{,,})}}$$

2) $A_{,} = a_{,,} + \sphericalangle\, A C a_{,} = a_{,,} + \sphericalangle\, CMN$, wo $a_{,,}$ die bekannte Rektascension des Punkts E bedeutet und der Winkel CMN aus dem gleichnamigen, bereits bei Bestimmung von $D_{,}$ verwendeten Dreieck erhalten wird.

Was die Koordinaten des zweiten Radiationspunkts betrifft, so überzeugt man sich ohne Mühe — wenn man bedenkt, daß derselbe sich als Schnittpunkt des nach dem Erdmittelpunkte verlegten, über E hinaus verlängerten AE mit dem Himmelsgewölbe darstellt — daß dessen Deklination derjenigen des ersten Radiationspunkts gleich aber entgegengesetzt ist, während seine Rektascension von derjenigen des Divergenzpunkts um 180° verschieden ist.

4. Berechnung der Bahnelemente des Meteors.

Im folgenden werden wir von nachstehendem

Hilfssatze

Gebrauch machen.

Bezeichnet (Fig. 25) zu einer bestimmten Zeit

$v = ds$ die Geschwindigkeit eines Planeten in der Bahn (den Weg in der mittleren Zeitsekunde),

r den Radiusvektor desselben,

a die mittlere Entfernung desselben von der Sonne und

k die Gaußsche Konstante, dann besteht die, auch für die Theorie der elliptischen Bewegung im allgemeinen, sehr wichtige Gleichung:

$$v^2 = \frac{k^2}{86400}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Um sie zu beweisen, hat man zunächst — wenn dr das dem Bahnelemente $ds = v$ entsprechende Inkrement des Radiusvektors, $d\varphi$ das der wahren Anomalie φ darstellt —:

$$v^2 = ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2,$$

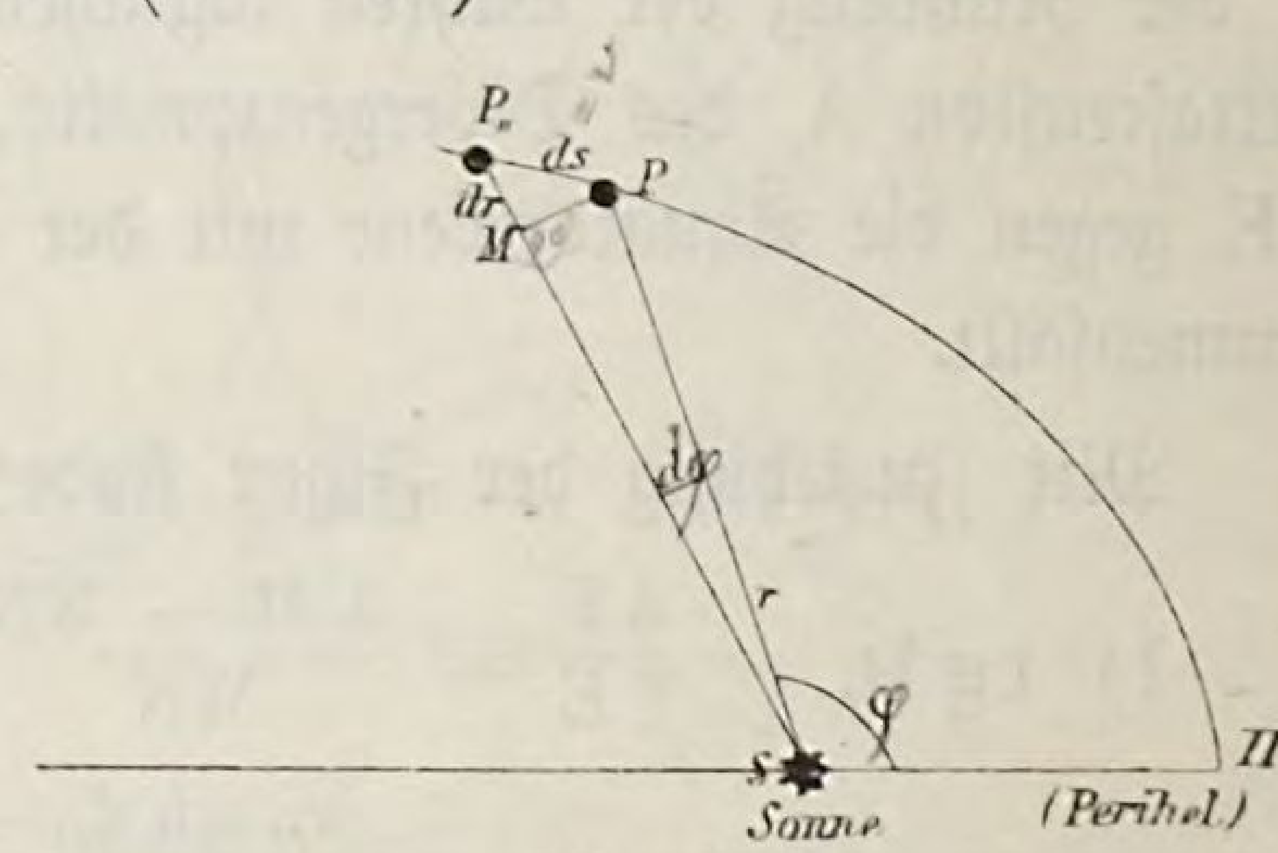


Fig. 25.

eine Beziehung, die sich sofort aus dem als geradlinig und rechtwinklig zu betrachtenden Differentialdreiecke $P, P_{,,} M$ ergiebt.

Nach der Polargleichung

$$r(1 + \varepsilon \cos\varphi) = p \text{ ist aber}$$

$$dr = \frac{r^2 \varepsilon \sin\varphi\, d\varphi}{p}.$$

Mithin:

$$v^2 = r^2 d\varphi^2 + \frac{r^4 \varepsilon^2 \sin^2\varphi\, d\varphi^2}{p^2} = r^2 d\varphi^2 . \frac{p^2 + r^2\varepsilon^2 - r^2\varepsilon^2\cos^2\varphi}{p^2}.$$

Wiederum folgt aus der Polargleichung:

$$r\varepsilon\cos\varphi = p - r,$$

so daß:

$$v^2 = \frac{r^3 d\varphi^2}{p}\left(2 - \frac{r}{a}\right) = \frac{r^4 d\varphi^2}{p}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Nun ist

$$r^2 d\varphi$$

der in der Zeitsekunde beschriebene Sektor, und da nach der theorischen Astronomie

$k\sqrt{p}$ = dem in einem Tage (86 400 Sekunden) vom Radiusvektor überstrichenen Sektor, so erhält man:

$$v^2 = \frac{k^2}{86\,400}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

In der vorstehenden Entwickelung wurde das während der Zeitsekunde zurückgelegte Wegteilchen als Maß der Geschwindigkeit angenommen, eine Annahme, die bei der Bewegung der Himmelskörper als physikalisch genau betrachtet werden darf. Der Regel nach wird man aber sogar den in einem Tage beschriebenen Bogen als geradlinig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen gelten lassen können, und wenn dieser täglich zurückgelegte Bogen mit

$$V$$

angedeutet wird, erhält man die bei praktischen Rechnungen meist gebrauchte Form der Gleichung:

$$V^2 = k^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Nennt man den Leitstrahl des Planeten, welcher nach demjenigen Brennpunkt der Bahnellipse führt, in welchem die Sonne *nicht* steht,

$$r_{,}$$

dann ist nach der Grundeigenschaft der Ellipse

$$2a - r = r_{,}.$$

Damit nimmt unsere Gleichung die leicht zu deutende Gestalt an:

$$V^2 = \frac{k^2}{a} \cdot \frac{r_{,}}{r}.$$

In dem uns beschäftigenden Probleme findet die vorstehende Gleichung zunächst Anwendung bei der Ortsbestimmung desjenigen Punkts der Himmelssphäre, den man in der Theorie der Meteorbahnen

Apex (= Spitze, Zielpunkt)

genannt hat. Ist E der Ort der Erde in einem bestimmten Zeitaugenblick (s. Fig. 26) und EA die Tangente an die Erdbahn, dann versteht man unter Apex denjenigen Punkt der Sphäre, nach welchem diese Tangente „hinzielt". Der Ort des Apex ändert sich demnach mit der fortschreitenden Bewegung der Erde unaufhörlich. Da die

Erdbahn sehr nahe kreisförmig, so steht die Tangente der Erdbahn zu jeder Zeit fast senkrecht zum Radiusvektor r. Die geocentrische Länge

$$L$$

des Apex differiert also von der geocentrischen Länge

$$\odot$$

der Sonne nahezu um 90°; der Apex kulminiert deshalb durchschnittlich 6 Stunden früher als die Sonne.

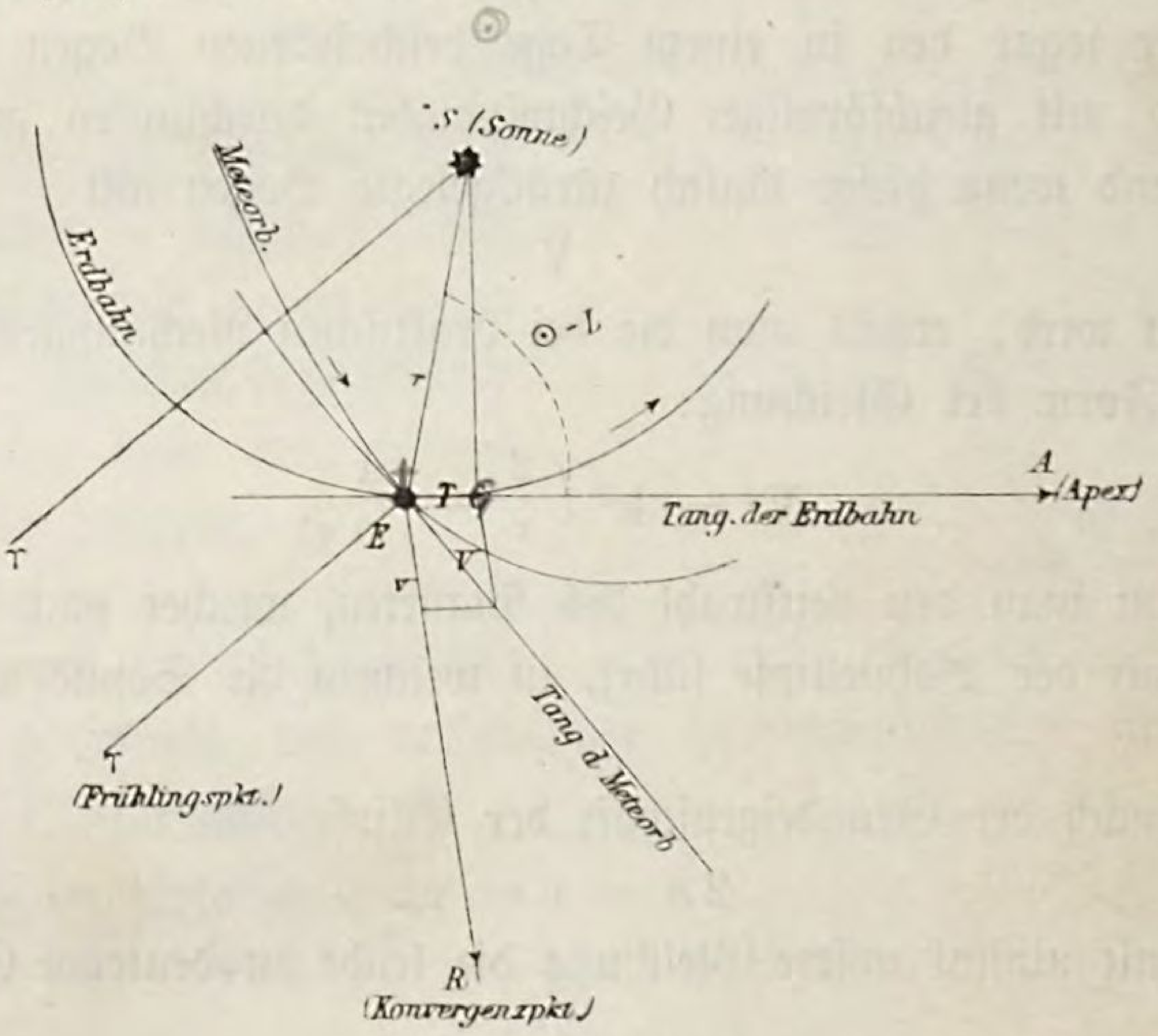


Fig. 26.

Der Winkel, welchen die Erdbahntangente EA mit dem Radiusvektor r einschließt, ist offenbar

$$= \odot - L,$$

und da die Sonnenlänge $\odot$ nach den Tafeln bekannt ist, so muß auch L als bestimmt betrachtet werden, sobald die Größe von $\odot - L$ berechnet ist.

Wird nun die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn, d. h. der in einem Tage zurückgelegte Weg EG durch

$$T$$

bezeichnet, dann hat man — da der mittlere Erdbahnhalbmesser a hier

überall als Einheit genommen wird — nach der oben entwickelten Gleichung:

$$T = k\sqrt{\frac{2}{r} - 1}.$$

Die doppelte Flächengeschwindigkeit der Erde ($k\sqrt{p}$) ist nach der Theorie der Sonnenbahn

$$= 0{,}9998\ k.$$

Andererseits ist dieselbe (s. Fig. 26)

$$= T . r . \sin(\odot - L),$$ so daß

$$T . r . \sin(\odot - L) = 0{,}9998\ k,$$ oder

$$k\sqrt{\frac{2}{r} - 1} \,.\, r \sin(\odot - L) = 0{,}9998\ k,$$

woraus folgt:

$$\sin(\odot - L) = \frac{0{,}9998}{r\sqrt{\frac{2}{r} - 1}} = \frac{0{,}9998}{\sqrt{2\,r - r^2}}.$$

Hiernach ist die Länge L des Apex bestimmbar, sobald man aus den Tafeln den Leitstrahl r und die Sonnenlänge $\odot$ entnommen hat.

Übrigens mag bemerkt werden, daß man mit dem Namen Apex auch noch einen anderen Punkt der Sphäre bezeichnet, nämlich denjenigen, gegen welchen mutmaßlich die progressive Bewegung der Sonne und also auch unseres ganzen Sonnensystems gerichtet ist.

Rechnungsbeispiel.

Gesucht die Länge L des Apex für die Zeit:

1866; XI; 13,59 mittl. Berl. Zeit.

Nach dem Jahrbuche ist

$$\odot = 231^{0}\ 28'$$
$$r = 0{,}9889.$$

Mithin:

$$\sin(\odot - L) = \frac{0{,}9998}{\sqrt{2 . 0{,}9889 - 0{,}9889^2}}$$

$$\odot - L = 89^{0}\ 8' \text{ oder } 90^{0}\ 52'.$$

Da r abnimmt, so ist (s. Fig. 26) der spitze Winkel zu wählen. Demnach

$$231^{0}\ 28' - 89^{0}\ 8' = L = 142^{0}\ 20'.$$

Die wahre und relative Meteorbahn.

Die beobachtete (relative) Meteorbahn AE (Fig. 27) ist, wie schon im Eingange unserer Betrachtungen erwähnt, verschieden von der wahren Meteorbahn AE_1, da die Beobachtungen unter dem Einflusse der Erdbewegung stehen, also gewissermaßen durch Aberration afficiert sind. Im Momente des Aufleuchtens befinde sich das Meteor in A und die Erde in G. Im Momente des Erlöschens sei das Meteor in der wahren Bahn nach E_1 fortgerückt und die Erde nach G_1. Bliebe die Erde unbewegt in ihrem anfänglichen Orte G, dann würde man das Meteor im Augenblicke des Erlöschens in der Richtung GE_1 wahrnehmen. Von ihrem wahren Stande G_1 aber erblickt man die Sternschnuppe in der Richtung G_1E_1, oder auf den Ort G reduciert, in der mit G_1E_1 parallelen Richtung GE. Man erblickt demnach den Anfangspunkt der sichtbaren Meteorbahn in der Richtung GA, den Endpunkt in der Richtung GE, so daß AE die durch die Beobachtungen gegebene, relative Bahn darstellt. Sind AM und EE_1 gleich und parallel GG_1, dann erscheint der Bogen AE_1 der wahren Bahn als Diagonale eines Parallelogramms, dessen eine Seite AE dem gleichzeitig beschriebenen Bogen der relativen Bahn, dessen andere Seite AM dem in derselben Zeit zurückgelegten Bogen der Erdbahn entspricht. Diese während der Dauer der Lichterscheinung durchlaufenen Wegteilchen kann man als Maße der Geschwindigkeiten betrachten. Man erhält dann zwischen diesen Größen (s. Fig. 27) — wenn

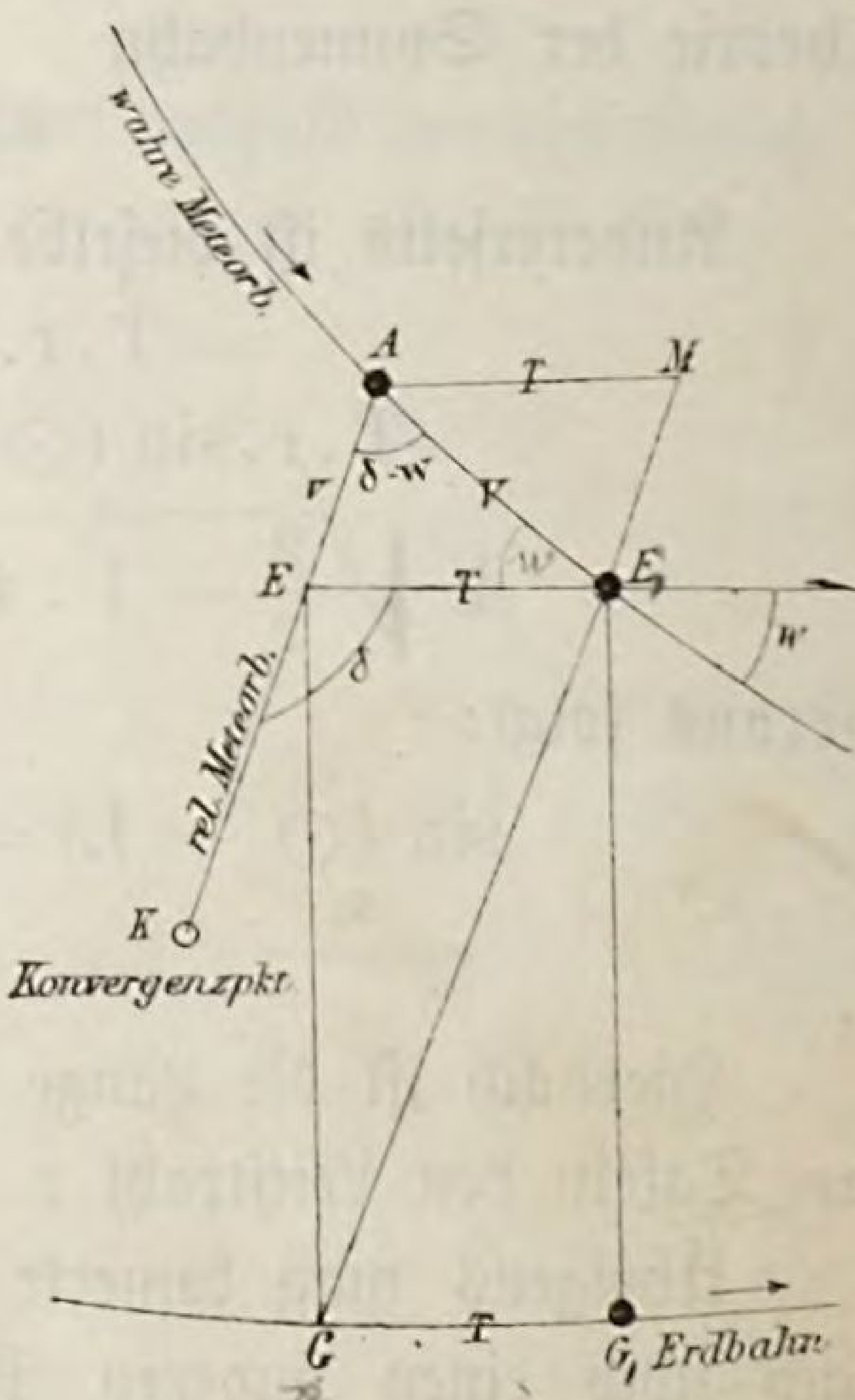


Fig. 27.

die Geschwindigkeit AE_1 des Meteors in der wahren Bahn $= V$,
" " AE " " " " relativen " $= v$,
" " EE_1 der Erde in ihrer Bahn $= T'$

der Winkel der Richtung der Erdbahntang. mit der relat. Bahn $= \delta$,
" " " " " " " " wahr. " $= w$,
gesetzt wird — leicht die folgenden Beziehungen:

1) $\frac{T}{V} = \frac{\sin(\delta - 10)}{\sin \delta}$

2) $V^2 = v^2 + T^2 + 2\,v\,T \cos \delta$.

Die Strecke AE zwischen den Punkten des Aufleuchtens und Erlöschens ist nach dem Früheren als bekannt zu betrachten, und da man auch den Zeitraum zwischen diesen Phasen beobachtet hat, so kann man die inzwischen von der Erde zurückgelegte Wegstrecke T gleichfalls bestimmen.

Wäre demnach noch der Winkel δ gegeben, dann ließe sich nach der zweiten Gleichung

die Geschwindigkeit V in der wahren Meteorbahn

und nächstdem aus der ersten Gleichung

der Winkel w

berechnen — zwei zur Bestimmung der Meteorbahn unentbehrliche Stücke.

Der fragliche Winkel δ

aber kann auf folgendem Wege gefunden werden.

In Fig. 28 bedeute:

E den Ort der Erde und des Meteors,

S den der Sonne,

♈ A_1 ACS einen größten Kreis in der Ebene der Ekliptik,

EC die Richtung der Erdbahntangente,

EB die Richtung der wahren Meteorbahn,

EA ihre Projektion auf die Ekliptik,

EB_1 die Richtung der relativen Meteorbahn,

EA_1 deren Projektion auf die Ekliptik,

dann liegen, wie wir wissen, die Strahlen

EB_1, EB und EC

in einer Ebene, nämlich der Ebene des größten Kreises B_1BC. Außerdem ist die Ebene der wahren Meteorbahn durch die Tangente EB dieser Bahn und den Radiusvektor ES $= r$ des Meteors (und der Erde) gegeben, da ja die Sonne auch den Mittelpunkt (Brennpunkt)

der Meteorbahn bildet. Die Ebene der Meteorbahn fällt demnach zusammen mit der Ebene des größten Kreises BS,

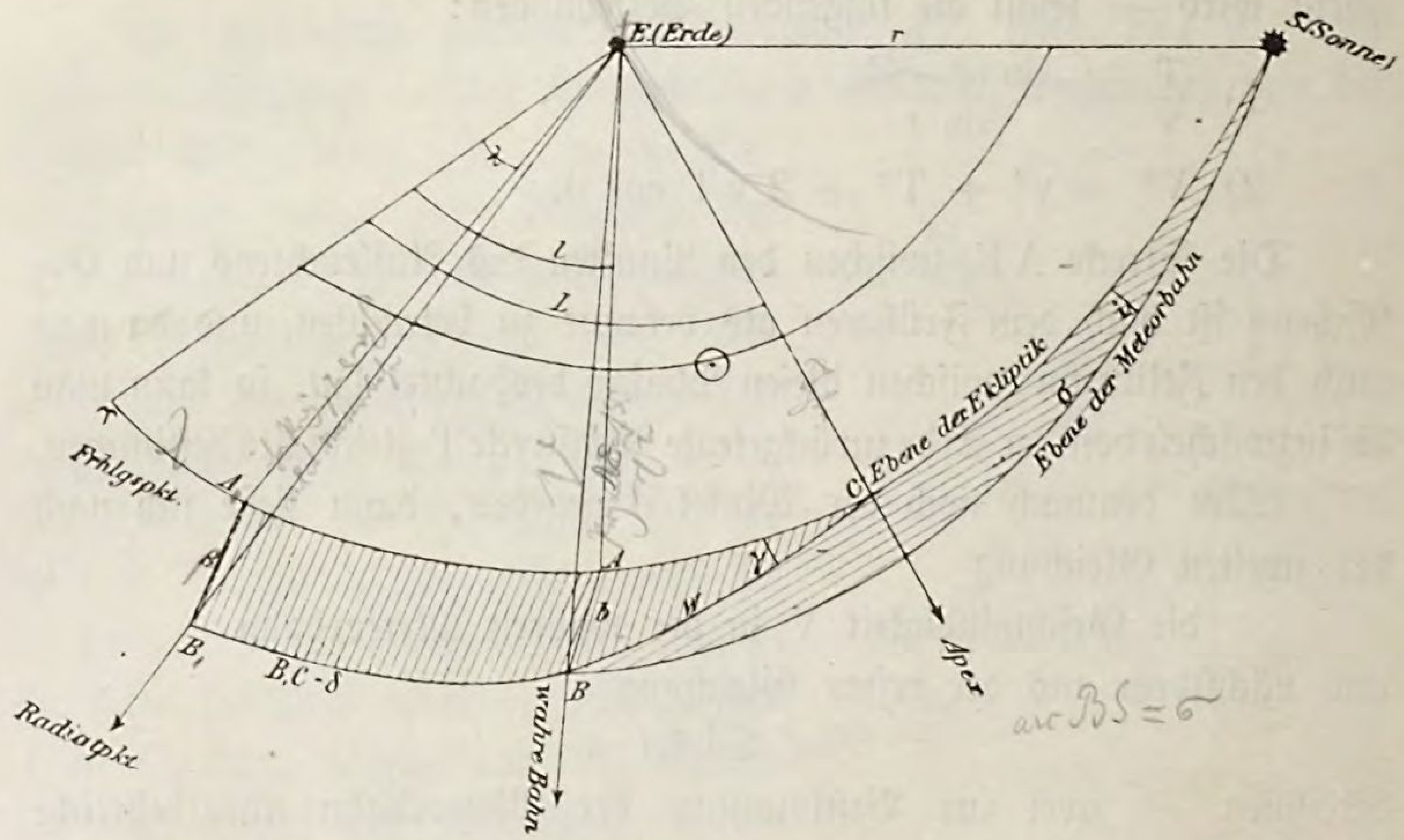


Fig. 28.

während der Bogen $B_1 C$
den gesuchten Winkel δ mißt.

Wird nun
die Breite $A_1 B_1$ des Radiationspunkts durch β,
die Länge $\Upsilon E A_1$ desselben durch λ,
die Länge $\Upsilon E C$ des Apex durch L,
die Neigung der Ebene des größten Kreises $B_1 B C$ gegen die
Ebene der Ekliptik durch γ
bezeichnet, dann sind die Größen
β, λ, L
nach dem Obigen als bekannt zu betrachten, und man erhält aus Fig. 28 zur Bestimmung von γ zunächst die Relation:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin (L - \lambda)}.$$

Nach Ermittelung von γ hat man aber zur Berechnung von δ sofort:

$$\sin \delta = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma},$$

und wir dürfen nunmehr im folgenden sowohl die Geschwindigkeit V des Meteors in seiner wahren Bahn als auch den Winkel w zwischen der Tangente der wahren Bahn und der Tangente der Erdbahn als bekannt ansehen.

Da indessen die Bestimmung der Geschwindigkeit V auf dem eben besprochenen Wege nicht besonders sicher, so sucht man dieselbe, wenn irgend möglich, auch noch auf andere Weise zu ermitteln. So fand, wie schon erwähnt, der amerikanische Astronom Newton, daß eine ausgezeichnet glänzende Stelle des Novemberrings je nach $33\frac{1}{4}$ Jahren zur Erde zurückkehrt. Betrachtet man demnach diesen Zeitraum, als Umlaufszeit der Leoniden, dann ergiebt sich nach dem dritten Keplerschen Gesetze für die halbe große Achse dieses Rings:

$$a = \sqrt[3]{33{,}25^2} = 10{,}34 \text{ Erdbahnhalbmesser.}$$

Da an dem betreffenden Novembertage der Radiusvektor der Meteore (und der Erde)

$$r = 0{,}98894, \text{ so wird}$$

$$\frac{2}{r} - \frac{1}{a} = 1{,}9257$$

und damit die gesuchte Geschwindigkeit nach dem oben bewiesenen Satze:

$$V = k\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}} = 0{,}02387,$$

immer die mittlere Sonnenentfernung als Längeneinheit vorausgesetzt.

Die Neigung der Ebene der Meteorbahn gegen die Ekliptik.

Wird die Breite des Zielpunkts der Tangente an die wahre Meteorbahn (Fig. 28) durch b,

seine Länge durch l,

die Sonnenlänge durch ⊙

und die Neigung der Meteorbahn durch die Ekliptikebene durch i angedeutet, dann zieht man aus der Figur leicht die folgenden Relationen:

$$\sin b = \sin \gamma \sin w$$

$$\sin(L - l) = \text{tg}\, b : \text{tg}\, \gamma$$

$$\text{tg}\, i = \text{tg}\, b : \sin(\odot - l)$$

Mit Hilfe derselben lassen sich die Größen

$$b, l, i$$

der Reihe nach berechnen.

Länge des aufsteigenden Knotens der Meteorbahn.

Im Augenblicke, wo die Erde den Meteorschwarm passiert, befindet sich dieselbe offenbar in einem Knoten der Meteorbahn, und es ist aus der Fig. 28 leicht ersichtlich, daß der aufsteigende Knoten

$$\Omega = \odot,$$

wenn, wie im Falle der Figur, b negativ, daß hingegen

$$\Omega = 180 + \odot,$$

wenn b positiv.

Die halbe große Achse der Meteorbahn.

Abgesehen von der oben angedeuteten Bestimmung dieses Elements aus der direkt beobachteten Umlaufszeit des Rings, kann dieselbe dadurch erfolgen, daß man in die bekannte Gleichung:

$$V = k \sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}$$

den auf dem früher angegebenen Wege der Rechnung erhaltenen Wert von V sowie den aus den Tafeln gezogenen Wert von r einführt.

Der Semiparameter p und die Excentricität ε der Meteorbahn.

Stellt

$$\sigma$$

(Fig. 28) den Winkel BS zwischen dem Radiusvektor r des Meteors (der Erde) und der Tangente EB der wahren Meteorbahn dar, dann hat man (vergl. die obige Bestimmung der Apex-Länge) für die doppelte Flächengeschwindigkeit des Meteors die Gleichung:

$$V \,.\, r \,.\, \sin\sigma = k\sqrt{p}.$$

Da V, r und k bekannt und σ durch die Gleichung (Fig. 28)

$$\cos\sigma = \cos w \cos(\odot - L) - \sin w \sin(\odot - L) \cos\gamma$$

gegeben ist, so erhält man zunächst den Semiparameter

$$p$$

der Meteorbahn.

Aus $p = \frac{b^2}{a}$ folgt dann weiter die kleine Halbachse der Meteorellipse, sodann aus a und b die Excentricität ε. $= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

Die wahre Anomalie φ der Meteorbahn.

Die wahre Anomalie φ des Meteors ergiebt sich — nach Ausmittelung von p, ε und r — unmittelbar aus der Polargleichung:

$$r(1 + \varepsilon \cos \varphi) = p.$$

Endlich werden

die Länge des Perihels,
die Periheldistanz und
die Zeit des Periheldurchgangs

nach dem bei Bestimmung der Planetenbahnen gezeigten Verfahren berechnet.

Hiermit sind sämtliche Elemente der Meteorbahn gefunden.

Rechnungsbeispiel (nach Klinkerfues).

Gegenstand: Bahn der Leoniden.

Zeit: 1866; XI; 13,59 mittl. Berl. Zeit.

Die Rechnung ergiebt für die Länge und Breite des Konvergenzpunkts:

$$\lambda = 323^0\ 12'$$
$$\beta = -10^0\ 16'.$$

Außerdem ist, nach früherer Rechnung:

Länge des Apex $L = 142^0\ 20'$.

Mithin:

$$L - \lambda = -180^0\ 52'$$
$$\gamma = 85^0\ 12',9$$
$$\delta = 190^0\ 18',2$$

[da nicht bloß $\sin \delta$ sondern auch $\cos \delta = \cos \beta \cos (L - \lambda)$ negativ].

Man hat ferner

Radiusvektor $r = 0,9889$.

Wird hiermit

$$T = k \sqrt{\frac{2}{r} - 1}$$

gesucht und nach dem Obigen

$$V = 0{,}02387$$

gesetzt, dann folgt:

$$\delta - w = - 7^{0}\, 29',3$$
$$w = 197^{0}\, 47',5.$$

Sodann:

$$b = - 17^{0}\, 43',6$$
$$L - l = - 181^{0}\, 32',0$$

und mit dem Tafelwert:

$$\odot = 231^{0}\, 28'$$

aus $\mathrm{tg}\, i = \mathrm{tg}\, b : \sin(\odot - l)$

$$i = 17^{0}\, 44'.$$

Die Bewegung ist retrograd, da

$\sin(\odot - l) = \sin 269^{0}\, 50'$ negativ.

Weil außerdem auch b negativ, so wird

$$\Omega = \odot = 231^{0}\, 28'.$$

Weiter nach Berechnung von

$$\sigma = 90^{0}\, 9',6$$

ergiebt sich:

$$\log p = 0{,}27488$$
$$\varepsilon = 0{,}9044$$
$$\varphi = 8^{0}\, 37'$$

Länge des Perihels $= 60^{0}\, 5'$

Periheldistanz $= a\,(1 - \varepsilon) = 0{,}9885$

Perihelzeit = 1866; XI; 7,27 mittl. Berl. Z.

Stellarastronomie.

(Astronomie der Fixsterne.)

Siebenter Abschnitt.

1. Allgemeines über Fixsterne.

Obwohl der Name Fixsterne in unserer Zeit seine ursprüngliche Bedeutung (nach der Meinung der Alten: „an eine krystallene Sphäre festgeheftete Sterne") verloren hat, und überhaupt die Annahme unbeweglicher Sterne nach den Gesetzen der Mechanik als eine unhaltbare erscheint, so läßt sich jener Bezeichnung eine relative Berechtigung doch noch keineswegs absprechen. Denn während die siderischen Örter der Wandelsterne (Planeten und Kometen) raschen und leicht feststellbaren Änderungen unterliegen, zeigen die Örter der Fixsterne — nach Abzug der scheinbaren Bewegungen — nur sehr geringe, bloß mit Aufbietung der feinsten Beobachtungsmittel wahrnehmbare Veränderungen. Die Fixsterne sind es allein, welche der Himmelssphäre ein festes Gepräge, einen bis zu einem gewissen Grade stabilen Charakter verleihen.

Auch in den stärksten Teleskopen erscheinen die Fixsterne ohne jede Ausdehnung, als bloße leuchtende Punkte. Die punktförmige Erscheinung tritt sogar desto schärfer hervor, je vollkommener die angewendeten Beobachtungswerkzeuge sind. Es läßt sich dies auch kaum

anders erwarten. Denn selbst von dem nächsten Fixsterne erscheint der Erdbahnhalbmesser unter einem Winkel, der noch nicht eine Sekunde erreicht. Umgekehrt müßte demnach dieser Fixstern einen wahren Durchmesser von über 20 Millionen Meilen besitzen, wenn er sich von unserem Standpunkte aus auch nur unter einem Winkel von 1" darstellen sollte. Die Annahme von so überaus großen Dimensionen der Fixsterne entbehrt aber schon nach dem Schlusse der Analogie — die uns zwingt, die Fixsterne als unserer Sonne vergleichbare Körper zu betrachten — jeder inneren Wahrscheinlichkeit.

Nach der scheinbaren (wegen der großen Entfernungsverschiedenheit selbstverständlich nicht auch absoluten) Leuchtkraft der Fixsterne teilt man dieselben in verschiedene Größenklassen dergestalt, daß die Sterne irgend einer Klasse durchschnittlich eine viermal geringere Lichtintensität aufweisen als die der nächstvorhergehenden. Jedoch bleibt eine scharfe Begrenzung der einzelnen Klassen, trotz der in der Neuzeit angewendeten photometrischen Messungen, noch der Zukunft vorbehalten. Die hellsten Sterne bilden die erste Klasse. Ein unbewaffnetes normales Auge vermag noch die Sterne sechster Größe zu erkennen. Alle nicht mit bloßem Auge sichtbaren Sterne heißen teleskopische, und diese hat man bis zur achtzehnten oder gar zwanzigsten Klasse fortgeführt.

Die Anzahl der ohne künstliche Hilfsmittel sichtbaren Sterne beläuft sich auf etwa 6000, darunter 18 Sterne erster Größe (8 nördlich vom Äquator: Wega = α Lyrae, Capella = α Aurigae, Aldebaran = α Tauri, Arkturus = α Bootis, Beteigeuze = α Orionis, Regulus = α Leonis, Altair = α Aquilae, Prokyon = α Canis minoris; 10 südlich vom Äquator: Sirius = α Canis majoris, Rigel = β Orionis, Spica = α Virginis, Antares = α Scorpii, Fomalhaud = α Piscis australis, Kanopus = α Argus, Acharnar = α Eridani, α Centauri, β Centauri, α Crucis australis). — Die Anzahl der teleskopischen Sterne ist eine unbegrenzte; sie wächst mit der Verbesserung der Beobachtungswerkzeuge. Die Sternkataloge weisen bereits über 100000 auf, deren sphärische Örter bestimmt sind. Aber schon W. Herschel (geb. 1738 zu Hannover, gest. zu Slough in England 1822) zählte deren gegen 20 Millionen. Er bediente sich dabei der Methode der Aichungen, nach welcher

die im genau bestimmten Gesichtsfelde des Fernrohres erscheinenden Sterne an den verschiedensten Stellen des Himmels gezählt und verglichen werden. Später wurden diese Zählungen fortgesetzt durch Lalande, Bessel, Argelander u. a. mittels der Methode der Zonenbeobachtungen, bei welcher ein Mittagsfernrohr nach und nach in verschiedene Deklinationen eingestellt und die Zahl der während einer bestimmten Zeit den Meridian passierenden Sterne ermittelt wird. Herschel fand aus seinen „Aichungen", daß die Zahl der Sterne desto mehr zunehme, je mehr man sich der sog. galaktischen Ebene, welche den Ring der Milchstraße annähernd halbiert, nähert und desto mehr abnehme, je mehr man den Polen jener Ebene (AR des Nordpols = $12^h\ 47^m$; D = + 27°) näher kommt (Herschelsches Gesetz). Er stellte außerdem fest, daß die Anzahl der Sterne einer bestimmten Größenklasse immer etwa $3\frac{1}{2}$—4 mal so groß sei als die Zahl der nächstvorhergehenden Klasse. Er bemerkte endlich, daß die Sterne der ersten, zweiten, dritten und vierten Klasse ziemlich gleichmäßig nach allen Himmelsrichtungen verteilt seien, also an den Polen der galaktischen Ebene in gleicher Anzahl vorhanden seien wie in dieser Ebene selbst und den zwischenliegenden Regionen — sowie, daß nur die kleineren (oder vielmehr lichtschwächeren) Sterne desto häufiger vorkommen, je mehr man sich der Milchstraße nähere und zwar in dem Maße, daß in der Gegend der Milchstraße die einzelnen Sterne nicht mehr mit freiem Auge zu unterscheiden seien, vielmehr einen gleichmäßig schimmernden Lichtgürtel bilden. — Aus alledem schloß nun Herschel:

1) daß alle von uns isoliert wahrgenommenen Sterne im allgemeinen mit unserer Sonne demselben Systeme, unserem Milchstraßensysteme, angehören,
2) daß diese Sterne sich nahezu in gleichen Abständen voneinander befinden, also im Raume unseres Milchstraßensystems gleich verteilt seien, auch sich nicht wesentlich durch ihre Größe unterscheiden, sondern nur durch ihre Entfernungen von der Erde und demnach ihre größere oder geringere Lichtstärke nur durch den letzteren Umstand bedingt erscheine,

3) daß die Sonnen (Fixsterne), welche Bestandteile unseres Milchstraßensystems bilden, (jedoch keinen kugelförmigen, sondern) einen scheibenförmigen Raum ausfüllen, dessen kleinster Durchmesser (in der Richtung der Achse der galaktischen Ebene) sich zum größten Durchmesser (in der galaktischen Ebene selbst) etwa wie 1 : 11 verhalte, und daß unser eigenes Sonnensystem ziemlich in der Mitte dieses linsenförmigen Raumes sich befinde — wodurch es sich erkläre, daß von unserer Sonne S

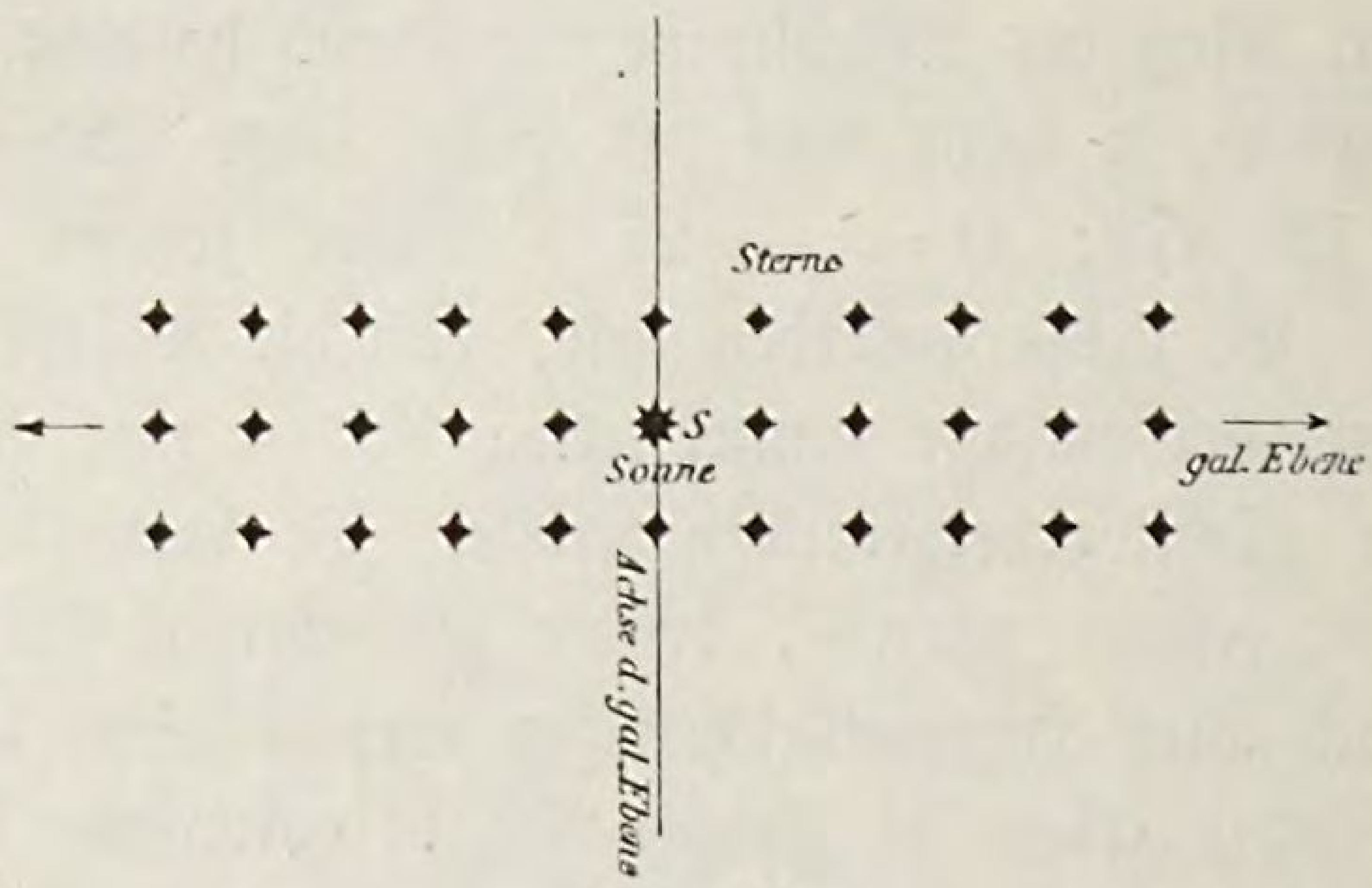


Fig. 29.

aus (s. Fig. 29) die Sterne in der Richtung der galaktischen Ebene (der Milchstraße) in weit größerer Anzahl und weit dichter zusammengedrängt erscheinen als in der Richtung der Achse jener Ebene,

4) daß die am Himmel beobachteten größeren oder kleineren, mehr oder weniger intensiven Lichtflecken, die sich bei teleskopischer Betrachtung ganz, teilweise oder gar nicht in einzelne Sterne auflösen — die sog. Sternhaufen, Nebelsterne und Nebelflecken — nur Analoga bilden zu dem Sternhaufen, dem Milchstraßensysteme, dem unser eigenes Sonnensystem angehört, daß mithin auch unser eigenes Milchstraßensystem sich uns als eine bloße Lichtwolke, als ein Nebelfleck, darstellen würde, wenn wir aus demselben heraustreten und unseren Standpunkt weit genug davon nehmen könnten.

Man muß einräumen, daß hierdurch die Erscheinungen im großen und ganzen höchst sinnreich erklärt werden, und es ist begreiflich, daß selbst die Neuzeit an dieser Herschelschen Auffassung nicht viel zu ändern vermocht hat.

In betreff der Nebelflecken ist noch zu erwähnen, daß gegenwärtig etwa 5000 astronomisch bestimmt sind, insbesondere durch die Bemühungen der beiden Herschel. Einer der ältesten (bald nach der Erfindung des Fernrohrs 1612 von Marius entdeckt) ist der rhombisch gestaltete Nebelfleck der Andromeda. Ein halbes Jahrhundert später fand Huygens den Nebelfleck im Schwerte Orions. — Wenn auch diese Welten vorläufig noch den Gegenstand bloßer kosmographischer Untersuchung bilden, so sind doch bereits bei vielen derselben (ca. 100) unzweideutige Spuren einer physischen Zusammengehörigkeit bemerkt worden, so daß die Zeit wohl nicht mehr fern ist, wo auch die Berechnung der Bahnen der Nebel die Astronomen beschäftigen wird.

Jeder der ungezählten Sterne bildet ein Individuum und hat als solches ein Recht auf individuelle Bezeichnung. Da es nun aber unmöglich und jedenfalls unzweckmäßig wäre, etwa jedem Sterne einen eigentümlichen Namen beizulegen, so hat man die Gestirne schon von Alters her in größere Gruppen — Sternbilder oder Asterismen — zusammengefaßt und zunächst diesen besondere, meist dem Sagenkreise der alten Völker entlehnte Benennungen gegeben. Ptolemäus erwähnt in seinem Almagest (Tabrir al magesthi, arabische Übersetzung von *Μεγάλη σύνταξις τῆς ἀστρονομίας*, magesthi = *μέγιστος*, demnach „größtes Werk über Sternkunde") bereits 48 Sternbilder, denen die neuere Zeit noch beiläufig ebensoviele hinzugefügt hat. Die einzelnen Sterne eines jeden Bildes werden dann mit den griechischen Buchstaben α, β, γ . . . bezeichnet (seit 1603, nach dem Vorschlage von Joh. Mayer), und zwar so, daß in der Regel, jedoch nicht immer der hellere Stern dem weniger hellen im Alphabete vorangeht. So bedeutet beispielsweise α Lyrae („Wega") den hellsten Stern der Leier (nämlich Apolls). Auch lehrt schon Ptolemäus, wie man, von einem Hauptgestirn ausgehend, die übrigen durch Verbindung mit geraden Linien („Alignement") bestimmen

kann. — Bei den einzelnen Gliedern eines Sternbildes ist selbstverständlich nur an eine örtliche, nicht aber eine physische Zusammengehörigkeit zu denken.

Indem wir betreffs der Sternbilder und Sterne auf die Himmelsgloben und Sternkarten verweisen müssen, mögen hier nur diejenigen zwölf Bilder, durch welche die Ekliptik sich erstreckt, aufgeführt werden:

1) Widder (lat. Aries, franz. Bélier, Zeichen: ♈).
2) Stier (lat. Taurus, franz. Taureau, Zeichen: ♉).
3) Zwillinge (Gemini, Gémeaux, ♊).
4) Krebs (Cancer, Ecrevisse, ♋).
5) Löwe (Leo, Lion, ♌).
6) Jungfrau (Virgo, Vierge, ♍).
7) Wage (Libra, Balance, ♎).
8) Skorpion (Scorpius, Scorpion, ♏).
9) Schütze (Sagittarius, Sagittaire, ♐).
10) Steinbock (Capricornus, Capricorne, ♑).
11) Wassermann (Aquarius, Verseau, ♒).
12) Fische (Pisces, Poissons, ♓).

Man hat dieselben in den Hexametern zusammengestellt:

Sunt Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo,
Libraque, Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora, Pisces.

Die Namen und Benennungen sind ohne Zweifel ägyptischen Ursprungs und beziehen sich wohl zum Teil auf die Mythologie der Ägypter, zum Teil auf ihre klimatischen Verhältnisse, ihre bürgerlichen Beschäftigungen, vielleicht auch auf den Lauf der Sonne (wie der Krebs, von dem aus die Sonne sich wieder rückwärts nach dem Äquator wendet).

Man teilte früher — und in manchen Fällen thut man dies auch jetzt noch — die Ekliptik in zwölf gleiche Bogen, von je 30°, in sogenannte Zeichen. Als erstes Zeichen gilt dabei, der vom Frühlingspunkte (♈) aus in der Richtung der jährlichen Bewegung gezählte Bogen von 30°, so daß z. B.

Länge der Sonne = 4 Z. 15 Gr. = 135°.

Bei Einführung der zwölf Sternbilder der Ekliptik — mutmaßlich 1400 Jahre vor unserer Zeitrechnung — fiel der Frühlingspunkt ungefähr in die Mitte des Widders. Infolge des Zurückweichens der Äquinoktialpunkte fällt dasselbe jetzt in den Anfang der Fische. Gleichwohl hat man für das erste Zeichen (♈ bis 30° der Länge) und alle folgenden die alten Namen beibehalten. Es ist demnach das Zeichen des Widders vom Sternbilde gleichen Namens wohl zu unterscheiden. — Die Sternbilder der Ekliptik erstrecken sich etwa 10° zu beiden Seiten ihrer Ebene, und diese von ihnen bedeckte Zone wird der Tierkreis oder Zodiakus (ζῴδιον = Tierchen) genannt, weil sämtliche Sternbilder auf die Tierwelt (die Wage hieß ehedem „Scheren des Skorpions", die Zwillinge wurden „die beiden Ziegen" genannt u. s. f.) Bezug nehmen. In den Tierkreis fallen die sphärischen Bahnen aller Hauptplaneten.

Besonders bemerkenswert ist noch die Veränderlichkeit der Sterne nach Glanz und Farbe, das Erlöschen einiger und das plötzliche, nur vorübergehende Erscheinen anderer. So war zu Hipparchs Zeiten der Stern am Vorderfuße des Widders ein Stern erster Größe; jetzt gehört er zur vierten Klasse. — Den 31. Stern im Drachen rechnete Flamsteed zu den Sternen siebenter, ca. 100 Jahre später Herschel zu denen der vierten Klasse. — Hevel und Herschel berichten von Sternen, welche zu ihrer Zeit vollständig erloschen. — Der Glanz mancher Sterne ist an bestimmte Perioden gebunden, erreicht ein Maximum und ein Minimum, wie insbesondere o im Walfische, dessen Lichtstärke innerhalb einer Periode von 334 Tagen von der zweiten Größe allmählich bis zum Verschwinden ab- und dann wieder zunimmt. Die Periode umfaßt bei einer Anzahl Sterne mehr als ein Jahr, bei anderen nur wenige Tage. Jedoch ist die Dauer der Zunahme keineswegs immer gleich der Dauer des Abnehmens. — Unter den sog. neuen Sternen (die nach kurzem Aufleuchten wieder erlöschen) ist der berühmteste der im Jahre 1572 von Tycho de Brahe in der Cassiopeja beobachtete. Er war 17 Monate sichtbar und übertraf anfangs den Jupiter und die Venus an Lichtstärke. In neuester Zeit (28. IV. 1848) wurde von Hind ein Stern 4. Größe im Schlangen-

träger wahrgenommen, der nach etwa einem halben Jahre wieder unsichtbar wurde. —

Was die Farbenänderung der Sterne betrifft, so sind nach Struve manche Sterne rot, die Wilhelm Herschel als gelb bezeichnet und andere rot, gelb oder grün, die Herschel vollkommen weiß erschienen. Auch Sirius scheint eine Farbenwandlung erfahren zu haben — ehemals, in altgriechischer Zeit, rot, gegenwärtig blendend weiß.

Über die Erklärungen dieser Erscheinungen herrschen noch bedeutende Kontroversen — und es muß vorläufig dahingestellt bleiben, ob z. B. die periodische Lichtänderung durch periodenweises Davortreten einer dunkeln Masse verursacht sei oder durch die verschieden große Leuchtfähigkeit der Oberflächenteile des rotierenden Sterns, oder durch eine linsenförmige Beschaffenheit desselben, infolge deren während der Rotation bald die breite, bald die schmale Seite uns Licht zuwirft, oder durch noch andere Umstände. — Die plötzlich aufleuchtenden und bald wieder verglimmenden (neuen) Sterne werden durch die Annahme einer über diese Weltkörper plötzlich hereinbrechenden Entzündungs-Katastrophe allerdings erklärt, aber die Entstehungsursache dieses Weltbrands selbst ist uns verborgen und läßt der Phantasie noch einen weiten Spielraum.

Schließlich mag noch die Erscheinung des Funkelns oder Scintillierens der Sterne kurz Erwähnung finden, welche um so auffälliger ist, da sie den Planeten nur in geringem Maße zukommt. In der Regel ist die unaufhörliche Veränderung des Glanzes, das Aufblitzen der Fixsterne — worin das Funkeln besteht — auch noch mit Farbenwechsel verbunden. Der Aragosche Erklärungsversuch — gestützt auf die Interferenz des Lichts, wonach die verschiedenen Strahlen, welche das weiße Licht der Sterne zusammensetzen und mit verschiedenen Geschwindigkeiten die atmosphärischen Schichten durchdringen, bei ihrem Zusammentreffen sich verstärken, schwächen oder vernichten können — scheint bis jetzt immer noch den Vorrang vor den neueren Erklärungsweisen zu behaupten.

2. Die scheinbaren, wahren und mittleren Örter der Fixsterne.

Die unmittelbar durch Beobachtung gefundenen Koordinaten — z. B. die Rektascension und Deklination – geben zunächst nur den scheinbaren Ort eines Sterns und zwar aus einem doppelten Grunde, wegen der Einwirkung der Aberration und der Refraktion. Wird der Ort von diesen beiden Einflüssen (vgl. sphär. Astr., S. 46, 53 u. ff.) befreit, dann erhält man die wahren Koordinaten, bezogen auf das zur Zeit der Beobachtung stattfindende wahre Äquinoktium und die wahre Lage der Weltachse. Wiederholt man zu verschiedenen Zeiten die Beobachtung desselben Sterns und geht jedesmal auf seine wahren Koordinaten zurück, dann ergeben sich wegen der unaufhörlichen Bewegung des Äquinoktiums und des Pols (der Präcession und Nutation) immerfort andere Koordinaten des Sterns, auch wenn derselbe sich in absoluter Ruhe befände. Um deshalb die Örter eines Sterns zu verschiedenen Zeiten miteinander vergleichen zu können, muß man zunächst noch die Nutation von den wahren Koordinaten absondern, dann aber auch noch weiter — wegen der Verschiedenzeitigkeit der Beobachtungen — den Betrag der Präcession in Anschlag bringen, indem man etwa alle Koordinaten auf das mittlere Äquinoktium der ersten Beobachtung reduciert. Jede Beobachtung liefert dann den Ort des Sterns, bezogen auf dasselbe mittlere Äquinoktium und den zugehörigen mittleren Pol, und die auf dies feste System reducierten Koordinaten heißen die mittleren Koordinaten des Orts, sowie man den durch diese Koordinaten dargestellten Ort den mittleren Ort des Sterns zu nennen pflegt. Der scheinbare, von Refraktion und Aberration beeinflußte Ort ist demnach thatsächlich verschieden von dem wahren oder mittleren Ort, indem jener in einen anderen Ort der Sphäre fällt. Hingegen haben der wahre und mittlere Ort denselben Visionsradius, sie liegen in demselben Orte der Himmelssphäre; dieser ist nur auf verschiedene Koordinatensysteme bezogen, das eine Mal auf das wahre, das andere Mal auf ein festes mittleres Äquatorsystem. Die Befreiung eines Orts von den Einflüssen der Aberration und Refraktion, sowie die Reduktion des zu verschiedenen Zeiten beobachteten Orts auf ein

und dasselbe feste System — mit anderen Worten, die Feststellung des mittleren Orts bildet die notwendige Vorbedingung für die Beantwortung der Frage, ob in den Zwischenzeiten der Beobachtung eine Ortsveränderung stattgefunden hat. Die Sternkataloge, welche vorzugsweise bestimmt sind, dieser Untersuchung als Grundlage zu dienen, enthalten deshalb die mittleren Örter der Sterne, d. h. ihre Koordinaten, bezogen auf das zu einer bestimmten Epoche stattfindende mittlere Äquatorsystem.

Ergeben nun spätere Beobachtungen eine Änderung der mittleren Koordinaten eines Sterns und sind die Beobachtungen nahezu in demselben Orte der Erdbahn angestellt, so daß der Einfluß einer etwaigen jährlichen Parallaxe (s. später) hierbei nicht zu befürchten ist, dann nennt man die stattgefundene Ortsveränderung die Eigenbewegung des Sterns. Aber auch selbst die so nachgewiesene Ortsveränderung gestattet noch nicht den Schluß auf eine wirkliche, dem Sterne allein oder teilweise innewohnende Bewegung. Denn es steht fest, daß unser gesamtes Sonnensystem sich in einer progressiven Bewegung befindet, infolge dessen unser Standpunkt den Sternen gegenüber ein fortwährend anderer wird. Die sog. Eigenbewegung könnte also sehr wohl ausschließlich, und muß wenigstens zum Teil dieser Änderung des Standpunkts (der Parallaxe) seine Entstehung verdanken. Man ist deshalb gezwungen, jene Ortsveränderung sich zunächst immer als das Resultat zweier Bewegungen zu denken, deren eine die scheinbare Eigenbewegung (motus parallacticus), deren andere die wirkliche Eigenbewegung (motus peculiaris) darstellt. Diese beiden Komponenten zu trennen, ist nun zwar eine sehr wichtige, aber auch sehr schwere Aufgabe. Im allgemeinen muß man bei dieser Absonderung von dem auch in vielen anderen, ähnlichen Fällen angewendeten Grundsatze ausgehen, daß dieselbe Ursache überall eine gleiche Wirkung hervorbringt. Die fortschreitende Bewegung der Erde im Weltraume hat bei allen Sternen eine scheinbare Eigenbewegung zur Folge und es kommt also darauf an, vor allem diese gemeinsame Bewegung zu ermitteln. Erst den Rest, welcher nach Abzug dieser allen Sternen gemeinschaftlichen Ortsänderung verbleibt, darf man als die wirkliche Eigenbewegung ansehen. Es ist einleuchtend, daß eine einigermaßen

exakte Behandlung dieses Gegenstands jahrhundertelange Beobachtungen von mittleren Örtern voraussetzt.

Rechnungsbeispiel.
(Bestimmung des mittleren Orts von α Librae.)

Meist wird der mittlere Ort eines Sterns in der Weise durch Beobachtung bestimmt, daß man ihn mit einem anderen Sterne, dessen Position genau bekannt ist, vergleicht und also nur die Differenzen der Koordinaten ermittelt.

Da, wie wir wissen, die Kataloge die mittleren Örter der Sterne angeben, die Beobachtungen aber die scheinbaren liefern, so muß jener Vergleichung eine Umwandlung des mittleren Orts des Fundamentalsterns in den scheinbaren vorausgehen, wobei zu bemerken ist, daß man hier, wie auch sonst oft, unter scheinbarem Ort den von der Refraktion befreiten, jedoch mit der Aberration noch behafteten Ort versteht.

Es sei zu bestimmen

der mittlere Ort von α Librae

durch Vergleichung mit dem gut bestimmten Sterne

α Virginis (Spica).

Man hat beobachtet:

1808	Uhrzeit der Kulmination		Meridianhöhe	
	α Virginis	α Librae	α Virginis	α Librae
20. IV	$13^h\ 15^m\ 39^s,5$	$14^h\ 40^m\ 51^s,0$	$19^0\ 56'\ 20'',7$	$14^0\ 52'\ 38'',5$
21. IV	$13^h\ 15^m\ 39^s,2$			

Barometerstand $=$ 28 Par. Zoll 4,5 Lin.
Thermometer $= - 4^0$ R.

Nach den Tafeln:
Länge der Sonne $= \lambda = 31^0$
Länge des aufst. Mondknotens $= ☊☾ = 222^0,5$.

A. Berechnung des scheinbaren Orts des Vergleichsterns.

Nach Zachs Katalog ist am 1. I. 1800 („Epoche"):
mittlere AR der Spica = 198° 40′ 1″,66
jährliche Änderung = + 47″,06
Änderung in 8ª 3ᵐ 20ᵈ = + 6′ 30″,85

1) mittlere AR der Spica am 20. IV. 1808 = 198° 46′ 32″,54
mittlere Deklination D der Spica = — 10° 6′ 45″,0
jährl. Änderung = — 19″,01
Änderung in 8ª 3ᵐ 20ᵈ = — 2′ 37″,89

2) mittlere D der Spica am 20. IV. 1808 = — 10° 9′ 22″,89

Mit dem obigen Werte der Sonnenlänge λ folgt nach p. 53 und 54 der sphär. Astronomie, indem man statt der Koordinaten der Ekliptik die des Äquators einführt:

Aberration in AR = + 18″,47
" " D = — 7″,53.

Sodann mit dem vorstehenden Werte von ☊☾ (cf. sphär. Astr., p. 7, 38 u. s. f.)

Nutation in AR = + 14″,24
" " D = — 3″,47.

Also:

3) scheinb. AR der Spica = 198° 46′ 32″,51 + 18″,47 + 14″,24 = 198° 47′ 5″,22

4) scheinb. D der Spica = — 10° 9′ 22″,89 — 7″,53 — 3″,47 = — 10° 9′ 33″,89.

B. Bestimmung des scheinbaren Orts von α Librae.

Aus den Beobachtungen der Spica am 20. und 21. ergiebt sich, daß die Sternuhr in 24ʰ um 0ˢ,3 retardierte, und da der Kulminationsunterschied von Spica und α Librae nur ca. 1½ Stunden ausmacht, so können wir den Fehler im Gange der Uhr außer acht lassen.

Kulminationsdifferenz = 1ʰ 25ᵐ 11ˢ,5 = 21° 17′ 52″,5.

Mithin:

1) scheinb. AR von α Librae = 198° 47′ 5″,22
+ 21° 17′ 52″,5

= 220° 4′ 57″,72

Beob. Zenit-Distanz der Spica	= 70° 3′ 39″,3	
Korr. weg. Refr., Bar., Therm.	= + 2′ 50″,74	
Verbesserte Zenit-Distanz der Spica	= 70° 6′ 30″,04	}
Beob. Zenit-Distanz von α Librae	= 75° 7′ 21″,5	}
Refr.	= + 3′ 51″,6	}
Verbesserte Zenit-Dist. von α Librae	= 75° 11′ 13″,1	}
Diff. d. Meridianhöhen = Diff. d. Dekl.	= 5° 4′ 43″,06	

Nun ist nach A:

Scheinbare Deklination der Spica = — 10° 9′ 33″, 89
Deklinationsunterschied = – 5° 4′ 43″, 06

Mithin:

2) scheinbare D von α Librae = — 15° 14′ 16″, 95.

C. Berechnung des mittleren Orts von α Librae.

Wie unter A findet man:

Aberr. in AR von α Librae = —	19″,31	negativ, weil hier Übergang von scheinb. zu mittl. Koord.
Nut. in AR " " " = —	15″,10	
	– 34″,41	
Nach B scheinb. AR " " " =	220° 4′ 57″,72	
mittl. AR am 20. IV. 1808 =	220° 4′ 23″,31.	

Ferner:

jährl. Präc. = —	49″,5	negativ, weil die Epoche vor der Beobachtungszeit liegt.
in 8^a 3^m 20^d = —	6′ 51″,12	

Also:

1) mittl. AR von α Librae in der Epoche = 220° 4′ 23″,31
— 6′ 51″,12

= 219° 57′ 32″,2.

Weiter:

Aberr. in D von α Librae	$= +$	$6'',00$
Nut. in D „ „ „	$= +$	$0'',57$
	$+$	$6'',57$

Nach B scheinb. D von α Librae $= - 15^0\ 14'\ 16'',95$

Also Mittl. D von α Librae am 20. IV. 1808 $= - 15^0\ 14'\ 10'',38$

Jährl. Präc. in D $= -$ $15'',4$

Präc. in $8^a\ 3^m\ 20^d = +$ $2'\ 7'',91$ (pos., weil Epoche vor d. Beobachtungszeit).

$- 15^0\ 14'\ 10'',38$

2) mittl. D i. d. Epoche $= - 15^0\ 12'\ 2'',47$.

3. Die Fixstern-Parallaxe.

Bei Bestimmung der Entfernungen der Fixsterne erweisen sich alle früher besprochenen Parallaxenmethoden als unzulänglich, da die hierbei gebrauchten Standlinien — im höchsten Falle gleich der Länge des Erddurchmessers — neben jenen Entfernungen völlig verschwinden. Nun ist aber die größte Standlinie, über die wir bei unseren Beobachtungen überhaupt verfügen können, der **Durchmesser der Erdbahn**, und dieser hat immerhin eine Ausdehnung — von ca. 40 Mill. Meilen —, welche zu den Entfernungen wenigstens einer Anzahl von Fixsternen in einem meßbaren Verhältnisse steht. In der That gründen sich denn auch alle Bestimmungsversuche — schon von Kopernikus gewagt, aber zuerst von Bessel im Jahre 1837, und nachher von Struve, Auwers u. a. mit Erfolg ausgeführt — auf Beobachtungen, welche möglichst in diametral entgegengesetzten Punkten der Erdbahn angestellt wurden. Dabei sei bemerkt, daß man die auf den Erdhalbmesser bezogene, nur bei Körpern des Planetensystems merkliche Parallaxe die *tägliche*, hingegen die auf den mittleren Erdbahnmesser sich beziehende die *jährliche* Parallaxe nennt.

Zur Ermittelung der Fixsternparallaxe auf dem angedeuteten Wege hat man verschiedene Methoden in Anwendung gebracht, die sich unter zwei Hauptgesichtspunkten zusammenfassen lassen, insofern ihnen entweder

1) die Parallaxe der absoluten Koordinaten

oder

2) die Parallaxe der Distanz zweier oder mehrerer (scheinbar) sehr nahe bei einander stehender Fixsterne

als Grundlage dient. Das letztere Verfahren wurde von Galilei angeregt, aber erst von Bessel zur Bestimmung der Parallaxe von Nr. 61 im Schwan mit annehmbarem Erfolge benutzt.

Nach der ersten Methode wird die Parallaxe der Fixsterne herzuleiten versucht aus der infolge der Verschiedenheit des Standpunkts eintretenden Änderung der Koordinaten, z. B. der Breite. Man wird sich von dem Wesen dieser Methode leicht eine Vorstellung bilden können, wenn man die Gleichungen I oder II auf p. 61 der sphär. Astr. zu Hilfe nimmt und an Stelle des einen Sterns den Pol der Ekliptik treten läßt, für die Winkel $\psi_,$ und $\psi_{,,}$ die beiden beobachteten Breiten einführt u. s. f. Die praktische Ausführung dieser Methode leidet indessen an so erheblichen, die Genauigkeit der Resultate stark in Frage stellenden Schwierigkeiten, daß man jetzt nur selten davon Gebrauch macht. Namentlich üben die in der langen Zwischenzeit der Beobachtungen eintretende Änderung der Instrumente, die möglicherweise sehr großen Temperaturverschiedenheiten zur Zeit der Beobachtungen, kleine Fehler in der angenommenen Refraktion, Aberration und Nutation einen ungünstigen Einfluß auf die Zuverlässigkeit der Beobachtungen aus.

Man hat es deshalb vorgezogen, die Parallaxe aus der Änderung der Winkeldistanz zweier an möglichst benachbarten Punkten der Sphäre befindlichen Gestirne herzuleiten. In diesem Falle treten die gerügten Mißstände in weit geringerem Grade hervor, weil einerseits die Messung nur durch Mikrometer erfolgt und andererseits etwaige Ungenauigkeiten in der Refraktion u. s. f. auf den sphärischen Ort zweier Nachbarsterne in gleicher Weise influieren und ebendeshalb unschädlich werden.

Der eine der beiden Nachbarsterne ist derjenige, dessen Entfernung gesucht wird, der andere ist der sog. Vergleichstern, bei dessen Auswahl man immer einem solchen Sterne den Vorzug giebt, dessen Parallaxe,

nach vorausgegangenen Untersuchungen und Berücksichtigung aller dabei in Betracht kommenden Umstände, als verschwindend betrachtet werden darf, da sonst aus der Distanzänderung der beiden Sterne nur auf die Differenz ihrer beiden Parallaxen geschlossen werden kann. Der Vergleichstern ist also dem untersuchten Sterne nur sphärisch (scheinbar) sehr nahe, in Wirklichkeit aber unendlich weit von ihm entfernt. Um dem Leser einen Begriff von diesem Verfahren zu geben, dessen nähere Ausführung der praktischen Astronomie zufällt, wollen wir wenigstens die Abhängigkeit der Parallaxe von der beobachteten Distanzänderung nachweisen und uns zu dem Ende wieder der Gleichung I_{α}, p. 61 der sphär. Astronomie bedienen, indem wir zunächst annehmen, daß beiden Sternen eine meßbare Jahresparallaxe zukomme. Da man hier unter allen Umständen die höheren Potenzen und Produkte der Parallaxe vernachlässigen darf, so nimmt dieselbe folgende einfache Gestalt an:

$$\cos \psi_{,} = (1 - \varrho \cos \gamma_{,} \,.\, \Pi - \varrho \cos \Gamma_{,} \,.\, \pi) \cos \psi_{,,} + \varrho \cos \Gamma_{,} \,.\, \Pi + \varrho \cos \gamma_{,} \,.\, \pi.$$

In dieser Gleichung bedeuten (vgl. Fig. 15. d. sph. Astr.):

ϱ die Entfernung der beiden Beobachtungsörter $O_{,}$ und $O_{,,}$, also die zwischen beiden liegende Erdbahnsehne, bzw. den Erdbahndurchmesser, wobei man die mittlere Sonnenentfernung als Einheit nimmt,

Π und π die Parallaxen der beiden Sterne $S_{,}$ und $S_{,,}$, auf dieselbe Einheit bezogen,

$\psi_{,}$ und $\psi_{,,}$ die an den Stationen $O_{,}$ und $O_{,,}$ beobachteten Winkeldistanzen der beiden Sterne,

$\Gamma_{,}$ und $\gamma_{,}$ zwei gleichfalls durch Beobachtung, jedoch nur auf der einen Station $O_{,}$ festzustellende Winkel.

Bezeichnet man nämlich die im Punkte $O_{,}$ beobachtete Breite des Sterns $S_{,,}$ durch $b_{,,}$, seine Länge durch $l_{,,}$, sowie die auf dem Wege der Rechnung zu ermittelnde Länge des Orts $O_{,,}$ durch λ, dann ist $\Gamma_{,}$ offenbar durch die Gleichung gegeben:

$$\cos \Gamma_{,} = \cos b_{,,} \,.\, \cos (l_{,,} - \lambda)$$

und $\gamma_{,}$ durch die analoge Gleichung:

$$\cos \gamma_{,} = \cos b_{,} \cdot \cos (l_{,} - \lambda).$$

Da $\psi_{,,}$ nach Voraussetzung nur ein sehr kleiner Winkel, so darf man die obige Gleichung zunächst schreiben:

$$\cos \psi_{,} = \cos \psi_{,,} + \varrho (\cos \Gamma_{,} - \cos \gamma_{,}) (\Pi - \pi),$$

woraus durch Substitution der vorstehenden Werte hervorgeht:

$$\Pi - \pi = \frac{\cos \psi_{,} - \cos \psi_{,,}}{\varrho [\cos b_{,,} \cos (l_{,,} - \lambda) - \cos b_{,} \cos (l_{,} - \lambda)]}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält lauter durch Beobachtung und aus der Erdbahntheorie bekannte Größen. Zwar setzt auch sie die Beobachtung von Längen und Breiten voraus, aber nur an einer Station, so daß die am meisten zu fürchtenden Fehlerquellen fortfallen. Mit Rücksicht auf die Kleinheit von $\psi_{,}$ und $\psi_{,,}$ darf obige Gleichung auch angesetzt werden:

$$\Pi - \pi = \frac{\psi_{,,} + \psi_{,}}{2 \varrho [\cos b_{,,} \cos (l_{,,} - \lambda) - \cos b_{,} \cos (l_{,} - \lambda)]} \psi_{,,} - \psi_{,}.$$

Ist die Parallaxe π des Vergleichsterns $S_{,,}$ verschwindend, dann hat man in derselben nur

$$\pi = 0$$

zu setzen.

Selbstverständlich müßte vor Anwendung dieser Gleichung der Einfluß der Eigenbewegung der Sterne auf die Distanzänderung eliminiert werden.

Man nennt die Entfernung eines Fixsterns, dessen jährliche Parallaxe 1″ beträgt,

eine Fixsternweite.

Dieselbe hat, den Erdbahnhalbmesser zu 20 Millionen Meilen angenommen, in runder Summe eine Größe von

vier Billionen Meilen,

zu deren Zurücklegung das Licht etwas mehr als drei Jahre gebraucht.

Einigermaßen zuverlässige Parallaxen hat man bis jetzt erst von wenigen Sternen.

Die kleinste Entfernung (größte Parallaxe) zeigt
α Centauri mit etwas mehr als einer Sternweite.

Sodann:

Entf. der	Wega	= ca.	5	Sternweiten	
„ „	Capella	= „	20	„	
„ des	Arcturus	= „	8	„	
„ „	Sirius	= „	5	„	
„ „	Polarsterns	= „	14,5	„	
„ „	von 61 Cygni	= „	4	„	(die am frühsten best. Parallaxe).

Achter Abschnitt.

Die Bahnen der Doppelsterne.

1. Einleitung.

Unter den Fixsternen finden sich zahlreiche — im Durchschnitt 4 Prozent — welche bei teleskopischer Betrachtung in zwei Sterne, s. g. Doppelsterne, zerfallen. Mitunter liegen ihre sphärischen Örter so nahe bei einander, daß eine Trennung der Komponenten nur mit den stärksten Teleskopen gelingt. In früherer Zeit wurde (namentlich von Galilei) die Verbindung beider Sterne für eine rein optische gehalten, indem man ihr nahes Beisammensein auf der Sphäre nur als scheinbar, als durch unseren zufälligen Standpunkt bedingt annahm, ihre wahren Örter aber als unendlich weit voneinander entfernt betrachtete.

Erst Lambert, Christian Mayer u. a. sprachen um die Mitte und den Ausgang des vorigen Jahrhunderts sich mit Entschiedenheit dahin aus, daß wenigstens ein Teil der Doppelsterne als eigene physische, von dem Gravitationsgesetze beherrschte Systeme anzusehen seien, in denen also die Komponenten Bahnen nach den Keplerschen Gesetzen beschreiben müßten. Bald nachher (gegen 1780) gelang es denn auch Wilhelm Herschel, bei manchen Doppelsternen Ortsveränderungen nachzuweisen, die über ihre physische Zusammengehörigkeit keinen Zweifel ließen. John Herschel, der Sohn des vorigen, schlug für die systematischen Doppelsterne den Namen binäre Sterne vor, während er unter die Doppelsterne im allgemeinen auch die nur optisch verbundenen zählt. — In neuerer Zeit hat sich besonders F. G. W. Struve (geb. 1793 zu Altona, gest. 1865 zu Petersburg, nacheinander Direktor der Sternwarten von Dorpat und Petersburg; Hauptwerk: Men-

surae micrometricae stellarum duplicium et multiplicium) um die Beobachtung der Binärsterne verdient gemacht — während W. Herschel, Savary, Encke, Klinkerfüs u. a. Methoden zu ihrer Bahnberechnung lieferten.

Mit Hilfe seines berühmten von Frauhofer (1824) hergestellten Refraktors fand Struve auch eine große Reihe dreifacher, vierfacher Systeme, ja selbst ein siebenfaches. Auch sind mondartige Körper, welche einen Hauptstern umkreisen, wahrgenommen worden, z. B. in ϑ Orionis.

Gegenwärtig kennt man etwa 6000 Doppelsterne, von denen verschiedene seit ihrer ersten Beobachtung bereits einen vollen Umlauf vollendet haben (ζ Herculis sogar schon wiederholt, denn seine Umlaufszeit beträgt nur 36 Jahre). Was die Berechnung der Fixsternbahnen betrifft, so verfügt man bis jetzt nur bezüglich der Binärsysteme über einigermaßen sichere Methoden, während die Untersuchungen der Bahnen mehrfacher Sterne über ein erstes Stadium noch nicht hinausgekommen sind.

Die Bestimmung aller dieser, insbesondere also auch der Bahnen der Binärsterne stützt sich auf die Voraussetzung, daß auch in ihnen die Keplerschen Gesetze befolgt werden, eine Voraussetzung, die von den Beobachtungen bis jetzt überall bestätigt wurde.

Das Verfahren selbst zerfällt in zwei Hauptabschnitte:

1) die Bestimmung der Projektionsellipse (der scheinbaren, beobachteten Bahnellipse),
2) die Bestimmung der Hauptellipse (der wahren Bahn des Sterns).

Dazu ist zunächst folgendes zu bemerken. Die beiden Komponenten eines Binärsterns scheinen im allgemeinen nach Masse und Größe nicht derart einander untergeordnet zu sein, daß der eine derselben auf den Namen eines Centralkörpers Anspruch machen könnte; jedoch zeigen beide in der Regel einen merklichen Unterschied hinsichtlich ihrer Lichtintensität. Den lichtstärkeren (aber vielleicht dennoch geringmassigeren) pflegt man den Hauptstern, den lichtschwächeren den Nebenstern zu nennen. Wenn nun, woran nicht zu zweifeln ist, auch in der Welt der Fixsterne das Gravitationsgesetz herrscht, dann beschreiben, wie wir bald beweisen

werden, eigentlich beide Komponenten des Binärsystems Ellipsen um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt. Aber auch, wenn man die eine Komponente, z. B. den Hauptstern, als ruhend betrachtet, umkreist denselben der Nebenstern in einer Keplerschen Ellipse, welche man dessen relative Bahn nennt. Es ist dies selbstverständlich nicht etwa eine Eigentümlichkeit der Fixsternbewegung, die gleichen Verhältnisse bestehen auch in unserem Sonnensysteme, wie an einer früheren Stelle bereits angedeutet wurde.

Indem wir nun die relative Bahn des Nebensterns um den Hauptstern mit unseren Beobachtungen verfolgen, ist es keineswegs diese wahre Bahn selbst, welche den Beobachtungen zugänglich ist, sondern nur deren Abbild auf der Sphäre, oder, genauer ausgedrückt, deren Projektion auf der durch den Hauptstern gelegten (und zu dem nach diesem Stern gezogenen Visionsradius senkrechten) Berührungsebene der Himmelssphäre. Auch diese Projektion ist, wie bald gezeigt werden soll, eine Ellipse, wenngleich so verschoben, daß der Hauptstern nicht mehr die Stelle ihres Brennpunkts einnimmt.

Die Doppelaufgabe, zunächst die Projektionsellipse, sodann die Hauptellipse zu bestimmen, findet hiernach in der Natur des Gegenstandes ihre hinreichende Begründung.

Die relativen Örter des Nebensterns in Bezug auf den Hauptstern werden gegenwärtig wohl ausschließlich durch die Polarkoordinaten

Distanz und Positionswinkel

angegeben, indem man unter ersterer den die beiden Sterne verbindenden Bogen eines größten Kreises, unter letzterem aber den Winkel versteht, welchen die Distanz mit dem durch den Hauptstern gelegten Himmelsmeridian bildet. Da dieser sich infolge der Präcession etwas ändert, so muß dieser Umstand bei Bestimmung des Positionswinkels in Anschlag gebracht werden. Selbstverständlich läßt sich sowohl die Distanz als der in das Gebiet des Binärsterns fallende Bogen des Meridians (der Polarachse) als gerade Linie auffassen.

Die nachstehende Untersuchung wird sich also, was zur Erleichterung des Verständnisses noch vorausgeschickt werden mag, auf folgende Hauptpunkte zu richten haben:

A. Die wahre Bahnellipse:

α) Das Princip der Erhaltung des Schwerpunkts.

β) Zwei Körper, welche sich nach dem Gravitationsgesetze anziehen, beschreiben um ihren gemeinsamen Schwerpunkt ähnliche Keplersche Ellipsen.

γ) Auch die relative Bahn, welche der eine Körper um den anderen, als ruhend angenommenen, zurücklegt, ist eine Ellipse nach Maßgabe der Keplerschen Gesetze.

B. Die scheinbare Bahnellipse:

α) Die wahre relative Bahn des Nebensterns projiciert sich auf der durch den Hauptstern gelegten Tangentialebene der Sphäre gleichfalls als Ellipse, ohne daß jedoch der Hauptstern mit dem Brennpunkt dieser Ellipse zusammenfällt.

β) Die von den Distanzen eingeschlossenen Sektoren der Projektionsellipse werden gleichwohl der Zeit proportional beschrieben.

γ) Berechnung der Größe dieser Sektoren.

C. Bestimmung der Projektionsellipse aus Beobachtungen:

α) Aus fünf Sternpositionen und einem Zeitintervalle.

β) Aus vier Positionen und zwei Zeitintervallen.

D. Bestimmung der wahren Bahnellipse aus der Projektionsellipse.

2. Die wahre Bahnellipse.

Lehrsatz von der Erhaltung des Schwerpunkts.

Der Schwerpunkt zweier (überhaupt beliebig vieler) Körper, auf die weder innere noch äußere Kräfte einwirken, verharrt entweder in Ruhe oder befindet sich in gleichmäßiger Bewegung. Dasselbe findet statt, wenn die Körper nur von inneren Kräften (wechselseitigen Anziehungen oder Abstoßungen) sollicitiert werden. Mit anderen Worten:

innere Kräfte üben auf den Bewegungszustand des Schwerpunkts keinerlei Einfluß aus.

Wir werden im folgenden immer nur zwei Körper in Betracht ziehen, da dies für unseren gegenwärtigen Zweck ausreichend ist und die Ausdehnung des Gesetzes auf ein System mehrerer Körper keinen Schwierigkeiten unterliegt.

Wir nehmen zuerst an, die beiden Körper seien frei von der Einwirkung *äußerer* oder *innerer* Kräfte — eine Annahme, welche, nach dem Gesetze der Trägheit, einerlei ist mit der Voraussetzung, daß die einzelnen Körper sich in einem *gleichförmigen* (den Zustand der Ruhe, als besonderen Fall, mit einschließenden) Bewegungszustande befinden. Hiernach können wir diesen Teil unseres Satzes auch so aussprechen: Bewegen sich die beiden Körper eines Systems gleichförmig — was nicht ausschließt, daß der eine oder beide Körper ruhen —, dann bewegt sich auch ihr Schwerpunkt gleichförmig, oder er ruht.

Zerlegt man nach Regeln, welche schon aus der Physik bekannt sind, die gleichförmigen Bewegungen der beiden Körper nach drei aufeinander senkrechten Koordinatenachsen, dann sind die Komponenten der Bewegung in der Richtung dieser Achsen, beispielsweise der Z-Achse *gleichförmig*. Werden deshalb die Z-Koordinaten der beiden Massen in ihrer Anfangslage durch

$$z_, \text{ und } z_{,,}$$

bezeichnet, dann lassen sich ihre Koordinaten in der zweiten Lage durch

$$z_, + q_, \,.\, t \text{ und } z_{,,} + q_{,,} \,.\, t$$

ausdrücken, wenn $q_,$ und $q_{,,}$ die konstanten Geschwindigkeiten der Körper in der Richtung der Z-Achse angeben und t die seit dem Verlassen der Anfangslage verflossene Zeit bedeutet. — Stellen außerdem

$$z \text{ und } z + \triangle z$$

die Koordinaten des Schwerpunkts am Anfange und Ende des betrachteten Bewegungsintervalls, sowie

$$m_, \text{ und } m_{,,}$$

die Massen der beiden Körper dar, dann hat man nach der Lehre vom Schwerpunkte:

$$z = \frac{m_, \, z_, + m_{,,} \, z_{,,}}{m_, + m_{,,}} \quad \text{und}$$

$$z + \triangle z = \frac{m_, (z_, + q_, t) + m_{,,} (z_{,,} + q_{,,} t)}{m_, + m_{,,}}.$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen folgt:

$$\triangle z = \frac{m_, q_, + m_{,,} q_{,,}}{m_, + m_{,,}} . t \dots\dots . (I).$$

Da der Faktor von t konstant, so ist das Inkrement von z, d. h. die Ortsveränderung des Schwerpunkts in der Richtung der Z-Achse der Zeit t proportional, diese Ortsveränderung erfolgt also *gleichförmig*. Das Gleiche gilt nun auch von der Bewegung des Schwerpunkts in der Richtung der beiden anderen Koordinatenachsen. Aus diesen *gleichförmigen Seitenbewegungen* des Schwerpunkts kann aber, nach den Anfangsgründen der Bewegungslehre, nur eine gleichförmige *Gesamtbewegung* resultieren, wodurch die erste Hälfte unseres Satzes bewiesen ist.

Aus Gleichung (I) ersieht man zugleich, unter welchen Umständen (wenn nämlich die beiden Geschwindigkeiten $q_,$ und $q_{,,}$ *entgegengesetzte* Richtung haben und sich *umgekehrt wie die Massen* $m_,$ und $m_{,,}$ verhalten)

das Inkrement $\triangle$ z auch Null werden,

der Schwerpunkt folglich ruhen kann.

Diese Bemerkung wird uns bei Betrachtung des zweiten Teils unseres Satzes, zu der wir jetzt übergehen, von Nutzen sein. Bekanntlich liegt der Schwerpunkt S zweier Massen $m_,$ und $m_{,,}$ (s. Fig. 30) auf ihrer geraden Verbindungslinie und teilt dieselbe im umgekehrten Verhältnisse der Massen, so daß

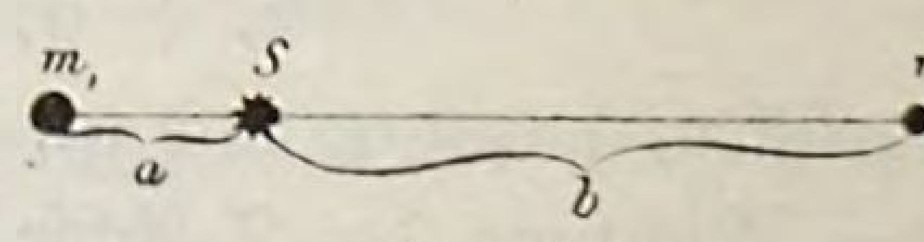


Fig. 30.

$$m_, : m_{,,} = b : a.$$

Ziehen nun die beiden Massen nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze einander an, dann wirkt — nach dem Principe von Aktion und Reaktion — auf jede derselben die gleiche, aber entgegengesetzte bewegende Kraft. Diese verteilt sich jedoch, wie wir bereits in der Theorie der elliptischen Bewegung gesehen haben, das eine Mal auf die Masse $m_,$, das andere Mal auf $m_{,,}$. Die beschleunigenden Kräfte

(Beschleunigungen) $p_,$ und $p_{,,}$ verhalten sich demnach umgekehrt wie die Massen $m_,$ und $m_{,,}$, mithin

$$p_, : p_{,,} = m_{,,} : m_,.$$

Während eines jeden unendlich kleinen Zeitteilchens dt lassen sich aber die unter dem Einflusse der Attraktionskräfte erlangten Geschwindigkeiten $p_, . dt$ und $p_{,,} . dt$ als konstant ansehen, und da diese sich wie die Beschleunigungen, mithin ebenfalls umgekehrt wie die Massen verhalten, so kann — nach der obigen Bemerkung — aus diesen durch die Attraktionen bedingten Bewegungen der Massen keine Ortsveränderung des Schwerpunkts hervorgehen.

Dies gilt übrigens nicht bloß dann, wenn keine äußeren Kräfte auf die Glieder des Systems wirken — der Schwerpunkt also ruht, oder sich in gleichförmiger Bewegung befindet — sondern auch dann, wenn das System und sein Schwerpunkt infolge äußerer Kräfte irgend welche Bewegung besitzen. Denn in jedem Augenblicke bestehen für die durch die bloße Attraktion bedingten Bewegungen die obigen Verhältnisse, also kann in keinem Augenblicke, d. h. niemals, durch die Attraktionsbewegungen allein eine Änderung in dem Bewegungszustande des Schwerpunkts erzeugt werden. Dies kann vielmehr nur durch äußere, dem Systeme nicht angehörige Kräfte geschehen.

Damit haben wir den wichtigen Satz:

> Der Schwerpunkt zweier Körper (allgemein eines Systems von Körpern), welche nur unter dem Einflusse ihrer wechselseitigen Attraktionen stehen, bewegt sich entweder geradlinig und gleichförmig, oder ist in Ruhe.

Doch darf man dabei nicht außer acht lassen, daß die Umkehrung des Satzes „Wenn der Schwerpunkt ruht, wirken nur innere Kräfte auf das System" falsch ist. Wie nämlich die einzelnen Teile eines und desselben Körpers unter dem Einflusse äußerer Kräfte eine rein rotierende Bewegung um den ruhenden Schwerpunkt annehmen können, ähnlich verhält es sich auch, wie wir weiter unten sehen werden, mit den Gliedern eines Systems von Körpern. — Der Bestand eines Systems erfordert, daß entweder das System — als Ganzes — und sein Schwerpunkt ruhen, wobei dennoch die einzelnen, dem Systeme

angehörigen Körper infolge ihrer gegenseitigen Anziehungen und geeigneter Seitenkräfte Bahnen um den Schwerpunkt beschreiben können, oder daß alle Teile des Systems samt ihrem Schwerpunkte sich in jedem Augenblicke nach derselben Richtung und mit gleicher Stärke bezw. gleicher mittlerer Winkelgeschwindigkeit fortbewegen, wobei gleichfalls die durch die Attraktionen bedingten Bewegungen und Bahnen fortbestehen, oder sich doch periodisch wieder herstellen. In diesem Falle befindet sich z. B. unser Mondsystem: Erde und Mond beschreiben infolge ihrer Attraktionen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt Keplersche (wenngleich durch die hinzutretende Anziehungskraft der Sonne sowohl in ihrem mittleren Zustande etwas modifizierte, wie von Moment zu Moment ein wenig veränderliche) Ellipsen; gleichzeitig aber vollendet das System mit seinem Schwerpunkte in einem Jahre einen Umlauf um die Sonne.

In ähnlicher Weise bewegt sich vermutlich unser ganzes Sonnensystem um die bis jetzt vergeblich gesuchte (von Mädler in die Alkyone der Pleiaden verlegte) Centralsonne. Ob andere Nebensonnen (Fixsterne), trotz ihrer überaus großen Entfernungen, den Schwerpunkt unseres Sonnensystems, den es aus eigener Kraft nicht zu ändern vermag, stören können, ist eine Frage, die sich wohl nur nach vieltausendjährigen Beobachtungen entscheiden läßt.

Schluß der Theorie der elliptischen Bewegung.

Da alle Körper sich gegenseitig anziehen, so giebt es in unserem Sonnensysteme keinen wahren, d. h. ruhenden Centralkörper. Beide, Sonne und Planet bewegen sich, und als wahrer Mittelpunkt der Bewegung kann nur ihr gemeinsamer Schwerpunkt angesehen werden, als derjenige Punkt, der nach dem Obigen — wenigstens soweit hier nur der Einfluß der inneren Kräfte in Betracht kommt — allein unbeweglich bleibt. Allerdings kann das Planetensystem, als Ganzes, oder, bildlich gesprochen, der von ihm eingenommene Raum eine selbständige Bewegung haben. Indessen für die Untersuchung der planetarischen Bewegungen wäre eine solche nebenhergehende Ortsveränderung des ganzen Systems bedeutungslos, da die relative

Bewegung der Körper unseres Sonnensystems, um die allein es sich hier handelt, dadurch nicht beeinflußt würde. Überhaupt aber muß der gemeinschaftliche Schwerpunkt aller Körper unseres Sonnensystems als der Mittelpunkt sämtlicher planetarischen Bewegungen und zugleich als der eigentliche Centralpunkt des Systems betrachtet werden — eine Auffassung, wodurch die Kopernikanische Weltanschauung, welche die Sonne als diesen Mittelpunkt postuliert, eine wesentliche Ergänzung erfährt. Annähernd richtig bleibt das Kopernikanische System durch den fast zufälligen Umstand, daß dieser Schwerpunkt infolge des bedeutenden Übergewichts der Sonnenmasse über die Planetenmassen, immer in den Sonnenkörper, wenn auch nicht in dessen Mittelpunkt hineinfällt und selbst bei der ungünstigsten Konstellation sämtlicher Planeten — wenn nämlich, was allerdings wohl kaum eintreten wird, alle Planeten in heliocentrischer Konjunktion, mithin auf der nämlichen Seite der Sonne, sich befänden — doch nur um ca. $\frac{3}{4}$ Sonnenhalbmesser aus der Oberfläche der Sonne hervortreten könnte.

Lehrsatz.

Die von zwei sich anziehenden Himmelskörpern um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt beschriebenen Bahnen sind einander ähnlich und werden in gleichen Zeiten von ihnen durchlaufen. Auch sind die auf beide Körper wirkenden Beschleunigungen umgekehrt proportional den Quadraten ihrer Entfernungen vom Schwerpunkte, wenn beide Körper sich nach dem Newtonschen Gesetze anziehen.

Beweis.

Der Einfachheit wegen werden wir als anziehendes System stets die Sonne und einen Planeten annehmen. Die unter dieser Voraussetzung gefundenen Gesetze gelten aber auch für irgend zwei andere Himmelskörper, z. B. die beiden Komponenten eines Fixsterns.

Wirkten die Sonne S und der Planet P (s. Fig. 31) lediglich mit ihren Anziehungen aufeinander, dann würde zwischen beiden eine fortgesetzte Annäherung stattfinden — bis zu ihrem Zusammentreffen im gemeinsamen Schwerpunkte M. Daß sie sich in keinem anderen Punkte

begegnen können, folgt unmittelbar aus dem Principe der Erhaltung des Schwerpunkts.

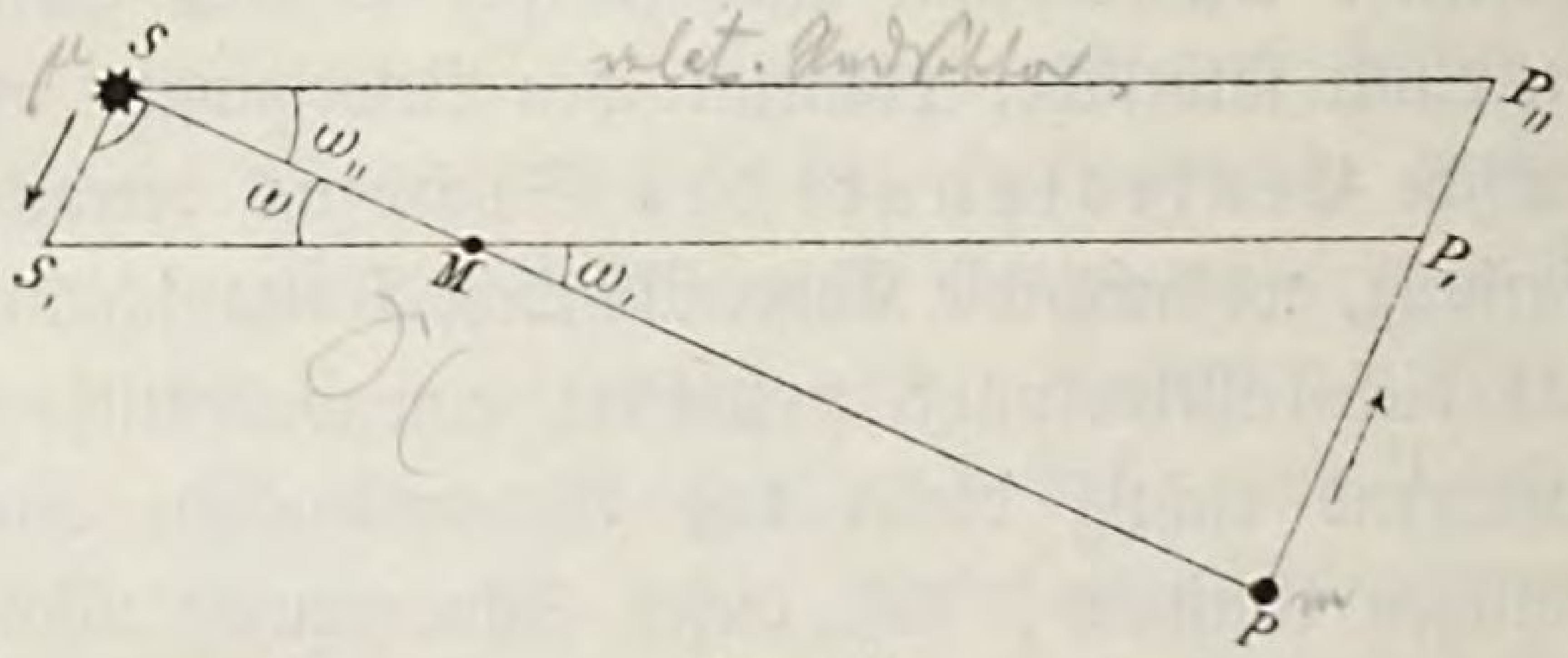


Fig. 31.

Sollen die beiden Körper hingegen Bahnen beschreiben, welche mit den Beobachtungen übereinstimmen und mit dem Bestande des Systems vereinbar sind, dann muß man annehmen, daß den Körpern zu irgend einer Zeit ein Anstoß gegeben wurde, der sie nötigte, in genau entgegengesetzter Richtung nach S, , bezw. P, fortzuschreiten und zwar so, daß um den Schwerpunkt M in gleichen Zeiten gleiche Winkel ω und $\omega_,$ beschrieben wurden. Abgesehen von etwaigen selbständigen Bewegungen des ganzen Systems blieb nur in jenem Falle der Schwerpunkt M in Ruhe. Denn dieser Punkt liegt stets auf der Verbindungslinie von Sonne und Planet und teilt diese im umgekehrten Verhältnisse der Massen. Da sich nun in dem angenommenen Falle der Bewegung

$$S_,M : P_,M = SM : PM$$

verhält, so ist M der Schwerpunkt von S, und P,, wenn er, wie wir voraussetzen, von S und P es war. — Diese Verhältnisse würden selbstverständlich fortdauern, wenn die beiden Körper nach dem erhaltenen ersten Impulse, ihre gleichförmige und geradlinige Bewegung unverändert beibehalten. Die Leitstrahlen der beiden Körper in Bezug auf den Schwerpunkt M, als Pol, würden außerdem in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume (nämlich Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe) bestreichen, so daß die geradlinige Bewegung eines jeden der beiden Körper den Charakter einer Centralbewegung hätte. — Aber auch, wenn die Körper sich gegenseitig anziehen, so würde die hierdurch modifizierte Bewegung nicht aufhören, eine Centralbewegung zu sein.

Denn da der Schwerpunkt ohne die Anziehung sich in Ruhe befand, so kann an diesem Zustande, wie wir bewiesen haben, auch durch die Anziehung nichts geändert werden. Da ferner die beiden Körper jederzeit auf der durch den Schwerpunkt M gezogenen Verbindungslinie liegen, so beschreiben sie in gleichen Zeiten gleiche Winkel um den Schwerpunkt, vollenden also auch ihre Umläufe um diesen Punkt in gleichen Zeiten. Da überdies, nach der Natur des Schwerpunkts, die beiden Leitstrahlen

S, M und P, M

in allen Lagen ein konstantes Verhältnis (umgekehrt wie die Massen) haben, so sind die Bahnen einander ähnlich. Da endlich, welchen Ort die beiden Körper auch einnehmen mögen, die anziehende Kraft unaufhörlich durch denselben Punkt M geht, so ist es eine wahre Centralbewegung, bei der, wie wir bereits aus den früheren Erörterungen über elliptische Bewegung wissen, das Gesetz der Erhaltung der Flächen (erstes Keplersches Gesetz) gilt. Zwar wurde damals aus der Gleichheit der Flächen auf die Centralität der Bewegung geschlossen, während hier der umgekehrte Schluß vorliegt. Doch wird man sich von der Richtigkeit dieser Umkehrung mit Zuziehung der Fig. 9, S. 29 der theor. Astronomie leicht überzeugen. Zudem werden wir diesen Punkt bald nochmals von einem anderen allgemeineren Gesichtspunkte aus betrachten.

Was nun die beschleunigenden Kräfte betrifft, von welchen die Bahnen der beiden Körper um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt bedingt sind, so setzen wir voraus, daß die Anziehungen von Sonne zu Planet und umgekehrt nach dem Gravitationsgesetze erfolgen, daß also, wenn

f die Einheit der Kräfte,
μ die Sonnenmasse und
m die Planetenmasse

bezeichnet, die auf die Sonne wirkende Beschleunigung

$$\text{durch } \frac{m.f}{SP^2},$$

hingegen die auf den Planeten kommende Beschleunigung

$$\text{durch } \frac{\mu.f}{SP^2}$$

dargestellt wird. Nach der Lehre vom Schwerpunkte ist aber:

$$\mu : m = PM : SM,$$

woraus sich ergiebt:

$$(PM + SM) : PM = (\mu + m) : \mu \text{ und}$$
$$(PM + SM) : SM = (\mu + m) : m.$$

Hierdurch wird:

$$PM + SM = SP = \frac{\mu + m}{\mu} \cdot PM \text{ und auch}$$

$$PM + SM = SP = \frac{\mu + m}{m} \cdot SM.$$

Man kann deshalb auch setzen:

$$\text{Sonnenbeschleunigung} = \frac{m^3 \cdot f}{(\mu + m)^2 \cdot \overline{SM}^2} \text{ und}$$

$$\text{Planetenbeschleunigung} = \frac{\mu^3 \cdot f}{(\mu + m)^2 \cdot \overline{PM}^2}.$$

Da die Faktoren $\frac{m^3 f}{(\mu + m)^2}$ und $\frac{\mu^3 \cdot f}{(\mu + m)^2}$ konstant sind, so unterliegen demnach Sonne und Planet beschleunigenden Kräften, welche den Quadraten ihrer Abstände SM und PM vom Schwerpunkte stets umgekehrt proportional sind. Bei Beurteilung der Bahnen um den Schwerpunkt darf man deshalb annehmen, daß *Sonne und Planet von Kräften angegriffen werden, welche in dem Schwerpunkte ihren Sitz haben und den Quadraten der Abstände von diesem Punkte stets umgekehrt proportional bleiben.*

Beispielsweise beschreibt infolge der Wechselanziehung zwischen Erde und Sonne letztere eine Ellipse um den Schwerpunkt, deren mittlerer Halbmesser ca. 60 Meilen beträgt.

Lehrsatz.

Die relative Bahn des einen Himmelskörpers um den andern, insbesondere des Planeten um die Sonne, ist den um den Schwerpunkt beschriebenen absoluten Bahnen ebenfalls ähnlich. Auch ist die Umlaufszeit in der relativen Bahn dieselbe.

Beweis.

In der vorhergehenden Figur rückte der Planet von P nach $P_{,}$, während die Sonne von S nach $S_{,}$ sich bewegte. Macht man deshalb

$$SP_{,,} \text{ gleich und parallel } S_{,}P_{,},$$

dann wird der Planet in $P_{,,}$ erscheinen, wenn man die Sonne S als ruhend annimmt. $PP_{,,}$ ist demnach die (der Einfachheit wegen rechtwinklig zu SP gezeichnete) Bahn des Planeten bezogen auf die ruhend angenommene Sonne. Da auch in der relativen Bahn der Planet einen Winkel $\omega_{,,}$ um die Sonne beschreibt, der an Größe den um den Schwerpunkt zurückgelegten Winkeln gleich ist, so folgt zunächst, daß die Umlaufszeit in der relativen Bahn übereinstimmt mit der in der absoluten Bahn. — Ferner steht aber der relative Radiusvektor

$$SP_{,,} = S_{,}P_{,}$$

zu den Leitstrahlen $S_{,}M$ und $P_{,}M$ bezüglich des Schwerpunkts in einem konstanten Verhältnisse, nämlich:

$$\frac{SP_{,,}}{S_{,}M} = \frac{\mu + m}{m} \text{ und}$$

$$\frac{SP_{,,}}{P_{,}M} = \frac{\mu + m}{\mu}.$$

Mithin ist die relative Bahn den absoluten Bahnen ähnlich.

Was die auf den relativen Planet einwirkende Beschleunigung anlangt, so wissen wir bereits aus früheren Betrachtungen, daß dieselbe

$$= \frac{(\mu + m) \cdot f}{SP^2}$$

zu setzen ist, indem man also der Sonne eine (an dem Planeten zum Vorschein kommende) beschleunigende Kraft zuschreibt, welche gleich ist der von der Sonne wirklich ausgehenden Planetenbeschleunigung

$$\frac{\mu f}{SP^2}$$

vermehrt um die von dem Planeten auf die Sonne ausgeübte Beschleunigung

$$- \frac{mf}{SP^2},$$

wobei man jedoch die letztere im umgekehrten, also im gleichen Sinne, wie die von der Sonne herrührende Planetenbeschleunigung zu nehmen hat.

Man überzeugt sich hiervon auch ohne Schwierigkeit mit Zuziehung der Figur, wenn man in dieselbe, der Allgemeinheit wegen, die Bahnen nicht geradlinig, sondern mit leichter Krümmung einträgt. Wir sehen aus der vorstehenden Betrachtung, daß, wenn die beiden Körper sich nach dem Gravitationsgesetze anziehen, die Beschaffenheit sowohl der um den Schwerpunkt beschriebenen Kurven als auch der relativen Bahn von beschleunigenden Kräften abhängt, die umgekehrt proportioniert sind den Quadraten der Abstände einerseits von dem ruhenden Schwerpunkte, andererseits von der als unbeweglich angenommenen Sonne. — In der früheren Untersuchung über elliptische Bewegung (s. erste Abteilung der theor. Astr.) war die Bahn gegeben und aus der Natur derselben wurde das Gesetz der beschleunigenden Kraft entwickelt. Im gegenwärtigen Falle müssen wir nun noch, um die in der vorausgeschickten Übersicht aufgestellten Sätze ihrem ganzen Umfange nach zu erweisen, das umgekehrte Problem lösen, das sich folgendermaßen formulieren läßt:

Die Kurve zu finden, welche ein Körper beschreibt, der gegen ein festes Centrum dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional angezogen wird.

Es sei (Fig. 32) S dieses Centrum, P ein Planet, der mit der Beschleunigung p nach dem Centrum hingetrieben wird. Wählt man S zum Ursprunge eines rektangulären Koordinatensystems und zerlegt die Beschleunigung p in zwei den Koordinatenachsen parallele Komponenten

$$PM \text{ und } PM_,,$$

dann werden diese letzteren, ihrem absoluten Werte nach, durch die Gleichungen

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = p \cdot \cos \varphi = p \cdot \frac{x}{r}$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = p \cdot \sin \varphi = p \cdot \frac{y}{r}$$

gegeben seien (vgl. S. 28, I. Abt. d. theor. Astr.).

Um über das Vorzeichen zu entscheiden, betrachten wir den

Planeten zunächst im ersten Quadranten. Da die Beschleunigung p nach dem Ursprunge S gerichtet ist, so bewirken ihre beiden Komponenten offenbar eine Bewegung im **negativen** Sinne beider Ko-

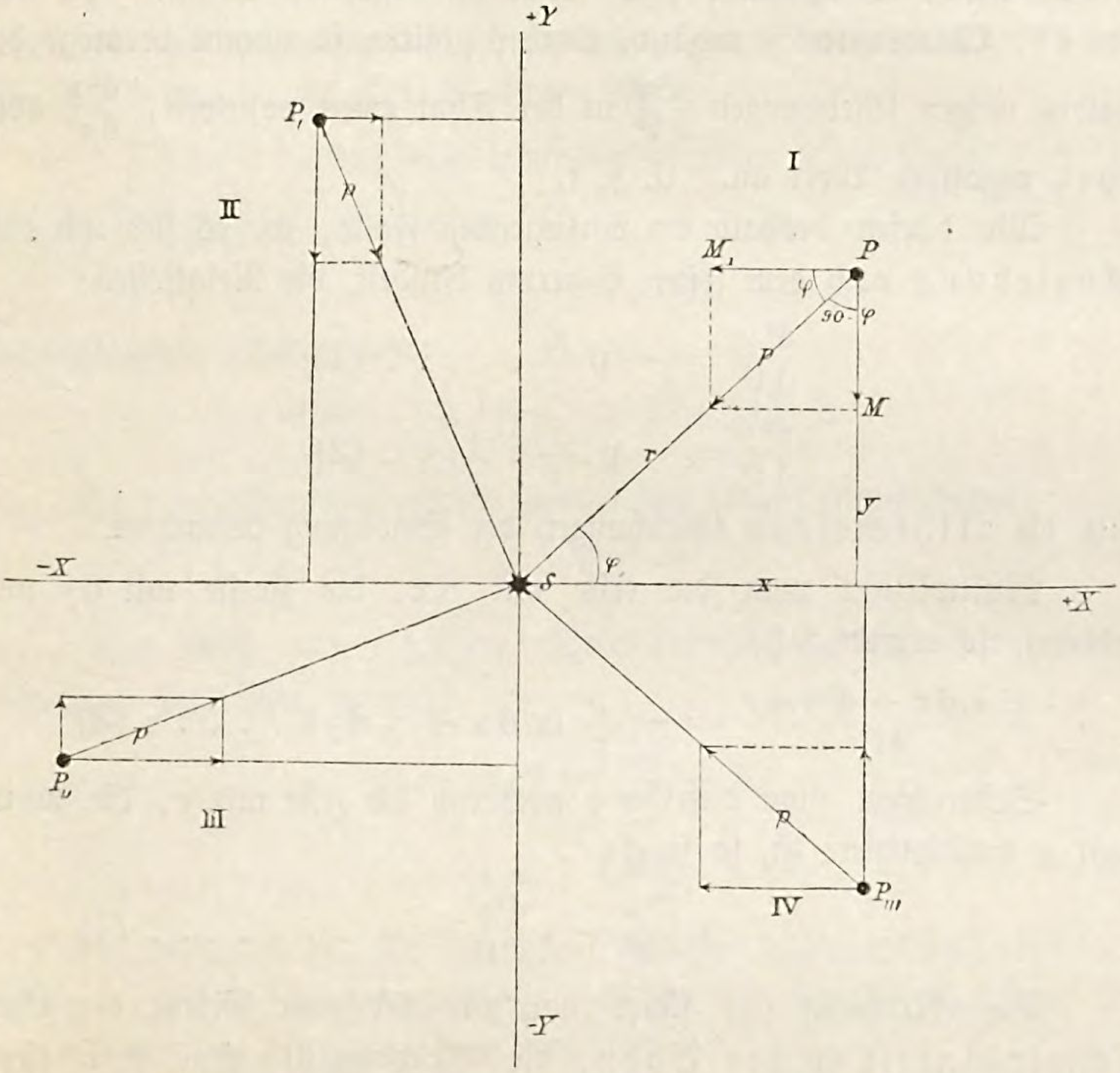


Fig. 32.

ordinaten, da ferner x und y im ersten Quadranten positiv sind, so kann jener Umstand — wenn p lediglich das absolute Maß der Beschleunigung bedeutet — nur dadurch zum Ausdruck gebracht werden, daß man setzt:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = - p \frac{x}{r}$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = - p \frac{y}{r}.$$

Diese beiden Gleichungen bleiben aber auch in den anderen

Quadranten bestehen, wenn man das Vorzeichen von x und y berücksichtigt. So erzeugt im IV. Quadranten die mit der y-Achse parallele Komponente eine Bewegung im positiven, die mit der x-Achse gleichlaufende Komponente eine solche im negativen Sinne. Da nun im IV. Quadranten y negativ, x aber positiv, so nimmt vermöge der beiden obigen Gleichungen $\frac{d^2 y}{d\,t^2}$ in der That einen positiven, $\frac{d^2 x}{d\,t^2}$ aber einen negativen Wert an. U. s. f.

Wir dürfen deshalb im vorliegenden Falle, wo es sich um eine Anziehung nach dem festen Centrum handelt, die Relationen:

$$\frac{d^2 x}{d\,t^2} = -\,p\,\frac{x}{r} \;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

$$\frac{d^2 y}{d\,t^2} = -\,p\,.\,\frac{y}{r} \;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$$

als die allgemeinen Gleichungen der Bewegung betrachten.

Multipliziert man die erste mit dx, die zweite mit dy und addiert, so ergiebt sich:

$$\frac{d^2 x . dx + d^2 y . dy}{dt^2} = -\,\frac{p}{r}\,(x\,dx + y\,dy) \;.\;.\;.\;.\;.\; (3)$$

Subtrahiert man dieselben, nachdem die erste mit y, die zweite mit x multipliziert ist, so folgt:

$$y\,\frac{d^2 x}{d\,t^2} - x\,\frac{d^2 y}{d\,t^2} = o \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (4)$$

Die Gleichung (3) führt nun zunächst zum Gesetze der Geschwindigkeit in der Bahn, die Gleichung (4) zum Prinzipe der Erhaltung der Flächen, während eine Verbindung der Integrale beider Gleichungen durch Elimination von dt die Gleichung der Bahn selbst liefert.

Eine etwas genauere Betrachtung zeigt nämlich, daß die linke Seite der Gleichung 3 einerlei ist mit

$$\tfrac{1}{2}\,d\,\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$$

und die rechte mit

$$-\,\tfrac{1}{2}\,\frac{p}{r}\,d\,(x^2 + y^2),$$

so daß man dieselbe durch die folgende ersetzen kann:

$$d\,\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = -\frac{p}{r}\,d\,(x^2 + y^2).$$

Da
$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ und}$$
$$dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

wenn ds das Kurvenelement (Bahnelement) bezeichnet, da ferner (vgl. S. 29, Anm. der 1. Abt. d. theor. Astr.)

$$\frac{ds}{dt} = v = \text{Geschwindigkeit des Planeten in der Bahn,}$$

so geht die obige Gleichung über in:

$$dv^2 = -2\,p\,dr,$$

woraus durch Integration:

$$v^2 = -2\int p\,dr + \text{Constans K}.$$

Da im vorliegenden Falle zufolge des Gravitationsgesetzes

$$p = \frac{\lambda}{r^2},$$

wo λ eine durch unsere früheren Betrachtungen hinreichend definierte Konstante bezeichnet, so wird:

$$v^2 = -2\,\lambda \int \frac{dr}{r^2} + K$$

$$= 2\,\lambda . \frac{1}{r} + K \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, \text{(I)}$$

Damit haben wir die Gleichung für die **Geschwindigkeit in der gesuchten Bahn.** Setzt man für die Konstante λ den ihr nach dem Obigen zukommenden Wert

$$(\mu + m) . f, \quad = \lambda$$

dann verwandelt sich die Gleichung in:

$$v^2 = \frac{2\,(\mu + m)\,f}{r} + K,$$

oder auch, wenn die Sonnenmasse μ zur Einheit genommen, die Planetenmasse m vernachlässigt (was auf den Charakter der Bahn ohne Einfluß ist) und statt f das Quadrat der Gaußschen Konstanten substituiert wird (cf. S. 5, 1. Abt. der theor. Astr.), in: $f = k^2$ $k = 0{,}0172$

$$v^2 = \frac{2k^2}{r} + K.$$

Was die Bedeutung der Konstanten K betrifft, so wird dieselbe am Schlusse dieser Entwickelung noch weiter besprochen werden.

Gehen wir nun zur Betrachtung der Gleichung (4) über. Wenn man dieselbe mit d t multipliziert und dann integriert, so kommt:

$$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = C, \text{ oder}$$

$$y\,dx - x\,dy = C\,dt \ldots \text{(II)}$$

Es ist nun aber (s. Fig. 33):

$y\,dx - x\,dy = r^2\,d\varphi =$ der doppelten Fläche des Sektors PSP_1.

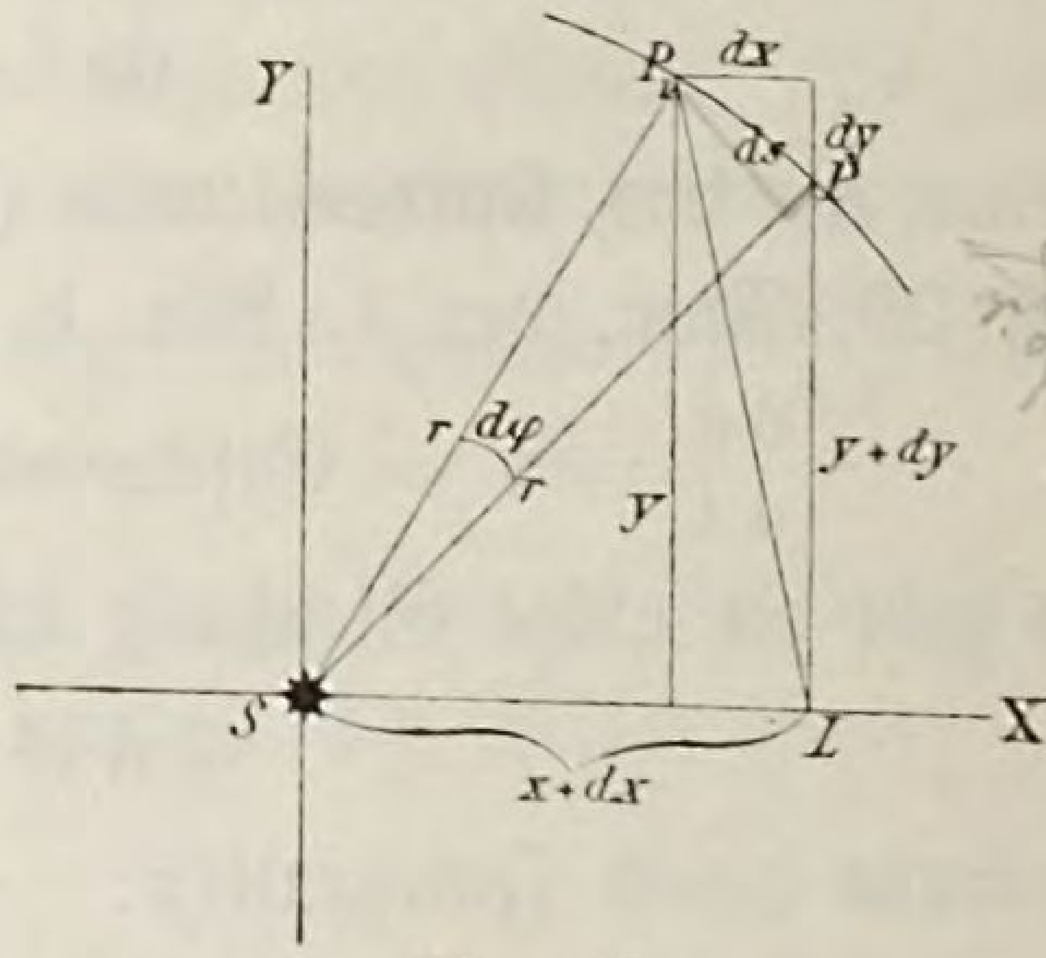


Fig. 33.

Denn die Fläche dieses Sektors (Dreiecks) ist gleich der Differenz der Flächen:

$$SLPP^1 - SLP$$

$$= \frac{x + dx}{2} \cdot y + \frac{y + dy}{2} \cdot dx - \frac{(x + dx)(y + dy)}{2} = \tfrac{1}{2}\,(y\,dx - x\,dy).$$

Da C eine Konstante, so folgt, daß in gleichen Zeitelementen und folglich überhaupt in gleichen Zeiträumen gleiche Sektoren beschrieben werden. Auch ist einleuchtend, daß die Konstante C selbst die doppelte Fläche des in der Zeiteinheit bestrichenen Sektors darstellt.

Da dies Resultat aus den beiden Fundamentalgleichungen (1) und (2) durch Elimination der Beschleunigung p erhalten worden ist, so folgt weiter, daß das Prinzip der Erhaltung der Flächen von dem Gesetze der beschleunigenden Kraft unabhängig und auf jede Art von Centralbewegung anwendbar ist. Übrigens mag noch bemerkt werden, daß dies Prinzip einer wesentlichen Verallgemeinerung (auf ein System sich bewegender und nur ihren gegenseitigen Anziehungen unterworfener Körper) fähig ist.

Um endlich die Gleichung der Bahn zu erhalten, setze man zunächst in der Gleichung (I)

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dr^2 + r^2\,d\varphi^2}{dt^2} \text{ (s. Fig. 33),}$$

wodurch dieselbe die Form annimmt:

$$\frac{dr^2 + r^2\, d\varphi^2}{dt^2} = \frac{2\lambda}{r} + K \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (I_\alpha),$$

sodann in der Gleichung (II)

$$y\, dx - x\, dy = r^2\, d\varphi,$$

wodurch diese übergeht in:

$$r^2\, d\varphi = C\,.\,dt \; . \; . \; . \; . \; (II_\alpha).$$

Wird nun d t aus (I_α) und (II_α) eliminiert, dann ergiebt sich, nach einigen leichten Umformungen, zwischen den Differentialen d r und d φ der Polarkoordinaten — des Radiusvektors und der wahren Anomalie — folgende Beziehung:

$$d\varphi = \pm\, C\,.\,\frac{dr}{r^2} : \sqrt{\frac{2\lambda}{r} - \frac{C^2}{r^2} + K}.$$

Um diese Gleichung zu integrieren, setze man:

$$\frac{1}{r} = u, \text{ also}$$

$$\frac{dr}{r^2} = -\,du.$$

Dieselbe nimmt dann die Gestalt an:

$$d\varphi = \pm \frac{C\,.\,du}{\sqrt{2\lambda u - C^2 u^2 + K}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

Vergleicht man hiermit die bekannte Gleichung:

$$d \operatorname{arc} \cos z = -\,\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}},$$

dann übersieht man leicht die behufs der Integration vorzunehmenden Umformungen von (α).

Nach Ausführung derselben wird erhalten:

$$d\varphi = \frac{\frac{C^2}{\sqrt{\lambda^2 + K C^2}} \cdot du}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda - C^2\,.\,u}{\sqrt{\lambda^2 + K C^2}}\right)^2}}, \text{ woraus}$$

$$\varphi = \operatorname{arc} \cos \frac{\lambda - C^2 u}{\sqrt{\lambda^2 + K C^2}} \text{ oder:}$$

$$\cos \varphi = \frac{\lambda - C^2 u}{\sqrt{\lambda^2 + K C^2}},$$ so daß, wenn u wieder $= \frac{1}{r}$ gesetzt wird:

$$r = \frac{C^2 : \lambda}{1 - \cos\varphi \, . \sqrt{1 + \frac{K C^2}{\lambda^2}}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\mathrm{III}).$$

Damit haben wir die **Polargleichung der gesuchten Kurve.**

Offenbar stellt dieselbe eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem

$$\sqrt{1 + \frac{K C^2}{\lambda^2}} < 1\text{, mithin K negativ,}$$
$$\text{oder} = 1\text{, mithin K} = \text{Null,}$$
$$\text{oder} > 1\text{, mithin K positiv.}$$

Da nach Gleichung (I):

$$K = v^2 - \frac{2\lambda}{r} = v^2 - \frac{2\,(\mu + m)\,f}{r},$$

so ist einleuchtend, daß der Charakter der Bahn nur von den drei Größen: v, 2 $(\mu + m)$ f und r abhängig, hingegen nicht bedingt ist von dem Winkel α (Fig. 34), welchen die Richtung der Bahngeschwindigkeit mit dem Leitstrahle r bildet.

Was die Konstante C betrifft, so ist nach Gleichung (II):

$$C = \frac{r^2\,d\varphi}{dt},$$

aber nach Fig. 34:

das doppelte Elementardreieck $r^2\,d\varphi$
$= r\,.\,v\,dt\,.\,\sin\alpha,$

wenn v die Bahngeschwindigkeit, also v dt das Bogenelement $P P_1$ und α den Winkel der Geschwindigkeitsrichtung (der Kurventangente) mit dem Leitstrahl r bezeichnet. Hieraus folgt:

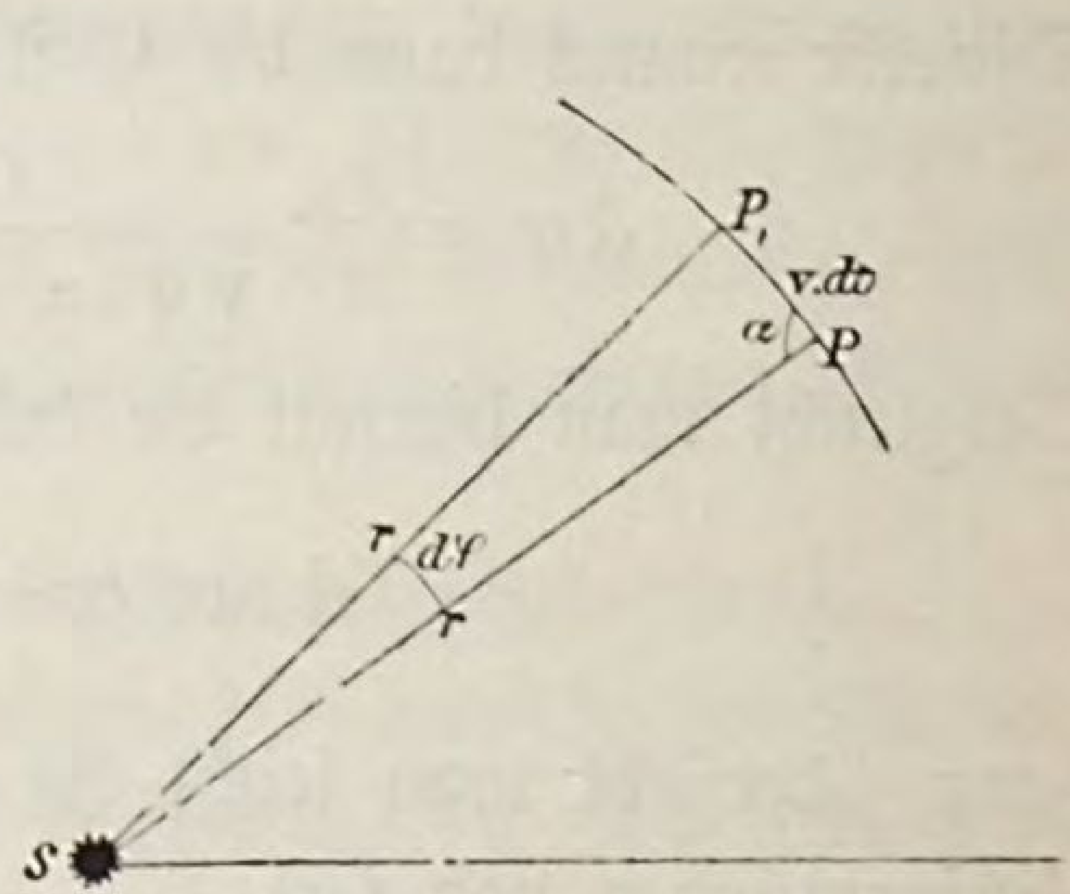


Fig. 34.

$$C = r\,.\,v\,.\,\sin\alpha.$$

Anmerkung.

In Gleichung III — die wir hier nur in Bezug auf den Hauptfall, die Ellipse, betrachten wollen — stellt offenbar $C^2 : \lambda$ den Semiparameter und $\sqrt{1 + \frac{KC^2}{\lambda^2}}$ die Excentricität der Bahn dar.

Man hat daher nach der analytischen Geometrie:

$$\frac{C^2}{\lambda} = \frac{b^2}{a}$$

$$\sqrt{1 + \frac{K C^2}{\lambda^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}},$$

wenn b die kleine und a die große Halbachse der Ellipse bezeichnet. Durch Elimination von C^2 aus beiden Gleichungen aber ergiebt sich:

$$K = -\frac{\lambda}{a} = -\frac{(\mu + m)\,f}{a} = -\frac{k^2}{a}.$$

Die Gleichung (I) für die Geschwindigkeit verwandelt sich dadurch in:

$$v^2 = k^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Aus dieser uns schon aus dem Früheren bekannten Gleichung folgt besonders, daß die mittlere Entfernung a eines Planeten vollkommen bestimmt ist durch die Größe eines einzelnen Radiusvektors und der zugehörigen Bahngeschwindigkeit, während die Richtung der Geschwindigkeit nur Einfluß hat auf den Ort des Perihels und die Excentricität der Bahn.

Rechnungsbeispiel.

1.

In welcher Kurve umkreist ein materieller Punkt die Erde, wenn derselbe in einer geocentrischen Entfernung von 50 000 Meilen seine Bewegung senkrecht gegen den Radiusvektor r mit einer Bahngeschwindigkeit von 0,1973 Meilen in der Sekunde beginnt?

Auflösung.

Da die mittlere Beschleunigung der irdischen Schwere in der Nähe der Erdoberfläche

$$g = 9{,}81 \text{ Meter} = 0{,}001322 \text{ Meilen},$$

aber der mittlere Erdradius

$$\varrho = 858 \text{ Meilen},$$

so beträgt nach dem Gravitationsgesetze die Beschleunigung in einer

Entfernung von einer Meile vom Erdmittelpunkte (wenn man sich die gesamte Erdmasse in diesem Mittelpunkte vereinigt denkt)

$$= 0{,}001322 \,.\, 858^2 = 973{,}22 \text{ Meilen.}$$

Mit dieser Beschleunigung wirken also — wenn man die Erdmasse zur Einheit der Massen und die Meile zur Einheit der Längen wählt — zwei Masseneinheiten aufeinander, welche um die Einheit der Entfernungen von einander abstehen. Es ist dies mithin die Größe, welche früher durch f bezeichnet worden ist, so daß:

$$f = 973{,}22 \text{ Meilen.}$$

Da die Konstante

$$\lambda = (\mu + m)\, f,$$

im vorliegenden Falle aber μ die Masseneinheit und m einen materiellen Punkt, also einen Körper von verschwindender Masse, bezeichnet, so ist auch

$$\lambda = 973{,}22 \text{ Meilen}$$

zu setzen.

Hieraus folgt die Konstante

$$K = v^2 - \frac{2\lambda}{r} = 0{,}1973^2 - \frac{2 \,.\, 973{,}22}{50\,000} = \text{Null.}$$

Mithin ist (vgl. III) die Excentricität der Kurve = 1, die Bahn selbst also eine P a r a b e l. Doch ist zu bemerken, daß dies nur mit sehr großer Annäherung gilt. In Wirklichkeit ist die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens einer Parabel — was voraussetzt, daß K = absolut Null — u n e n d l i c h gering. Ebenso ist die K r e i s b a h n als ausgeschlossen zu betrachten, da dieselbe (cf. Gleichung III) an die Bedingung geknüpft ist

$$\sqrt{1 + \frac{KC^2}{\lambda^2}} = o,$$

deren Eintreten, man darf wohl sagen, unmöglich ist, weil sie der Natur keinerlei Spielraum mehr gestattet.

Unter den Kegelschnitten sind es deshalb nur die

E l l i p s e und H y p e r b e l,

welche als Bahnen der Himmelskörper einzig und allein in Betracht kommen. Die Parabel im Gebiete der Kometenbahnen und der Kreis

im Bereiche der Planetenbahnen dürfen immer nur, wegen der verschwindenden Wahrscheinlichkeit ihres Eintretens, als *Annäherungen* betrachtet werden. Auch für diejenigen Kometen, welche nur als passagere Glieder unseres Sonnensystems auftreten, wäre an und für sich die hyperbolische Bahn unendlich wahrscheinlicher als die parabolische, wenn dieselben bei ihrer Wanderung durch das Weltall nicht von anderen Sonnen in ihren Bahnen fortwährend gestört würden.

Um zu unserem Beispiele zurückzukehren, so liegt der Scheitel (das Perihel) der Parabel offenbar in dem Ausgangspunkte der Bewegung, da wir deren Richtung senkrecht zum Leitstrahle angenommen haben.

Die doppelte Flächengeschwindigkeit des materiellen Punkts ist

$$C = r \,.\, v \,.\, \sin 90^0$$ = 50000 · 0,1973

$$= 9865 \ \square\text{Meilen.}$$

Der Semiparameter der Parabel ergiebt sich aus der Gleichung (cf. III):

$$p = C^2 : \lambda = 100\,000 \text{ Meilen.}$$

2.

Welche Bahn wird von einem materiellen Punkte unter übrigens gleichen Umständen beschrieben, wenn die anfängliche Tangentialgeschwindigkeit

$$v = 0{,}1 \text{ Meilen}$$

angenommen wird.

Auflösung.

In diesem Falle ist

$$K = v^2 - \frac{2\lambda}{r} \,.\, = 0{,}1^2 - 0{,}03893$$

$$= -\, 0{,}02893.$$

Mithin durchläuft der Punkt eine *elliptische* Bahn.

Da ferner

$$C = 50\,000 \,.\, 0{,}1 \sin 90^0 = 5000,$$

so hat man für die *Excentricität*

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{K C^2}{\lambda^2}} = \sqrt{1 - \frac{0{,}02893 \, . \, 5000^2}{973{,}22^2}}$$

$$= 0{,}48622$$

und für den Semiparameter

$$p = C^2 : \lambda = 25\,688 \text{ Meilen.}$$

3. Die scheinbare Bahnellipse der Binärsterne.

Nehmen wir nach diesem Exkurse unsere Untersuchung über die Bahnen der Binärsterne wieder auf, so dürfen wir nunmehr überzeugt sein, daß, wenn die Komponenten sich nach dem Gravitationsgesetze anziehen, jeder der beiden Sterne um den anderen, als ruhend betrachteten Stern, also insbesondere der Nebenstern um den Hauptstern, eine Ellipse beschreibt. Die anderen, theoretisch noch möglichen, Kegelschnitte fallen hier selbstverständlich außer Betracht.

Die nächste Aufgabe besteht nun darin, nachzuweisen, daß auch die Projektion jener Ellipse auf die durch den Hauptstern gelegte, zu dem Visionsradius senkrechten Berührungsebene der Himmelssphäre eine Ellipse darstellt. Diese ist es, welche, wie wir bereits wissen, von den Beobachtungen zunächst gegeben wird.

In Fig. 35 bedeute

MpNp, die Projektion

der wahren Bahnellipse MPNP,,

ferner

S den Hauptstern,

P den Nebenstern.

Senkrecht zur Ebene der Projektion steht die Verbindungslinie zwischen dem Auge des Beobachters und dem Hauptstern S. Aber auch alle anderen von dem Auge nach dem Umfange der wahren Bahn gezogenen Geraden dürfen als parallel zum Visionsradius und demnach ebenfalls senkrecht zur Projektionsebene betrachtet werden.

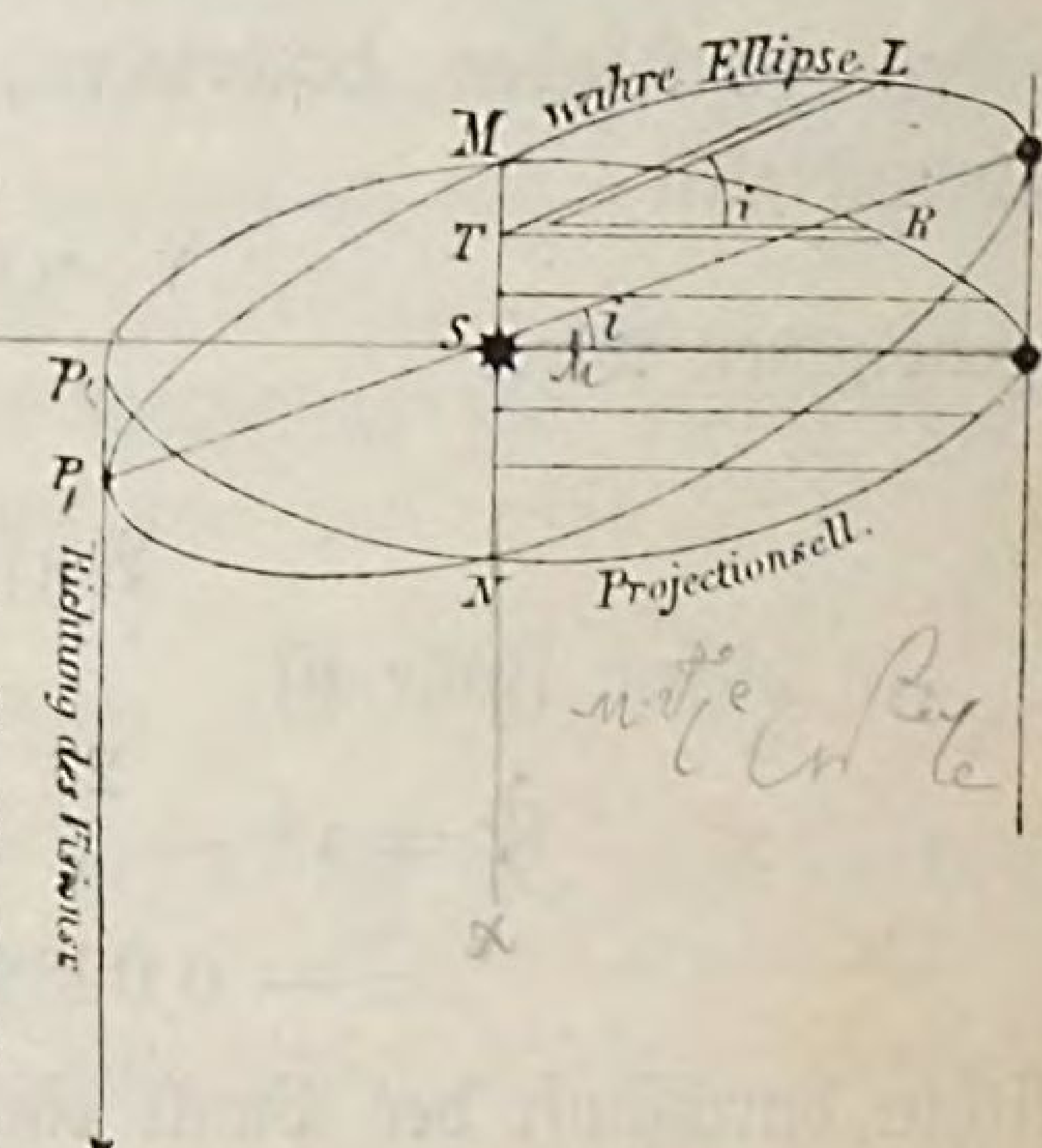


Fig. 35.

Die Schnittlinie

$$MN$$

der Ebene der wahren Bahn mit der Ebene der Projektion pflegt man die **Knotenlinie** der Doppelsternbahn zu nennen, da die Projektionsebene bei Bestimmung solcher Bahnen eine ähnliche Bedeutung hat wie die Ekliptikebene bei Bestimmung der Planetenbahnen. Diese Knotenlinie ist, der Einfachheit der Zeichnung wegen, in der Figur senkrecht zur großen Achse PP_1 angenommen, während sie der Regel nach eine schiefe Neigung gegen die Achse haben wird.

Bezeichnen wir die Neigung beider Ebenen durch i, dann werden offenbar alle in der Ebene der wahren Bahn zur Knotenlinie senkrecht liegenden Strahlen in der Projektion nach dem Verhältnisse

$$1 : \cos i$$

verkürzt erscheinen. So ist z. B.

$$Sp = SP \,.\, \cos i.$$

Überhaupt also können wir uns vorstellen, daß die Projektion durch eine konstante Verkürzung der zur Knotenlinie senkrechten Ordinaten der wahren Bahn hervorgeht. Durch eine solche Veränderung der Ordinaten einer Ellipse aber wird wiederum eine Ellipse erzeugt. Denn es sei:

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + e = o, \text{ oder}$$

$$y = -\frac{ax + c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - 4b)\,x^2 + 2\,(ac - 2d)\,x + (c^2 - 4e)}$$

die Gleichung der wahren Bahnellipse, bezogen auf die Knotenlinie, als Abscissenachse, und eine darauf senkrechte, in der Ebene der Bahnellipse liegende gerade, als Ordinatenachse. Dann findet für die Ellipse bekanntlich die Bedingung statt:

$$a^2 < 4b.$$

Werden nun alle Ordinaten dieser Ellipse nach demselben Verhältnisse geändert, indem man z. B. jeder die n-fache Größe giebt (wo n größer oder kleiner als 1 sein kann); bezeichnet man ferner die neuen Ordinaten durch Y, dann hat man:

$$Y = ny = -\frac{nax + nc}{2} \pm \frac{n}{2}\sqrt{(a^2 - 4b)\,x^2 + \ldots}$$

Eine Betrachtung dieser Gleichung zeigt aber sofort, daß auch die neue, durch die Endpunkte der Y sich erstreckende Kurve einen Kegelschnitt und zwar abermals eine Ellipse liefert, da die früher vorausgesetzte Beziehung

$$a^2 < 4b$$

durch die Multiplikation mit n unversehrt bleibt.

Die Projektion der wahren Bahn ist demnach gleichfalls eine Ellipse.

Doch ist einleuchtend — und die Folge wird es bestätigen —, daß der Hauptstern S, obwohl er im Brennpunkte der wahren Ellipse steht, keineswegs auch den Brennpunkt der Projektionsellipse darstellt. Mit anderen Worten: der Visionsradius nach dem Brennpunkte der Hauptellipse fällt im allgemeinen nicht zusammen mit dem Okularstrahle nach dem Brennpunkte der Projektionsellipse. — Hingegen liegen die Mittelpunkte beider Ellipsen auf demselben Visionsradius. Um dies einzusehen, bemerke man, daß nicht bloß die auf der Knotenlinie senkrechten Ordinaten der Hauptellipse (oder auch Teile dieser Ordinaten) zu ihren Projektionen in einem konstanten Verhältnisse stehen, sondern daß überhaupt parallele Strecken in der Ebene der Hauptellipse zu ihren Projektionen in demselben Verhältnisse (selbstverständlich nicht gerade in dem Verhältnisse 1 : cos i) stehen. Betrachtet man deshalb die beiden Hälften eines Durchmessers der Hauptellipse, so lassen sich diese beiden Halbmesser als parallele Strecken auffassen; ihre Projektionen müssen also ebenfalls gleich sein. Da dies nun von allen Durchmessern der Hauptellipse gilt, so halbiert die Projektion des Mittelpunkts der Hauptellipse alle Projektionen ihrer Durchmesser, d. h. jene Projektion ist der Mittelpunkt der Projektionsellipse. Daraus folgt u. a. der wichtige Satz, daß die Verbindungslinie des Mittelpunkts der Projektionsellipse mit dem Hauptstern (der beiden Bahnebenen angehört und außerdem im Brennpunkte der Hauptellipse steht) in die Projektion der Hauptachse der wahren Ellipse fällt, daß mithin die in Rede stehende Verbindungslinie, beiderseits verlängert, den Umfang der Projektionsellipse in zwei Punkten trifft, welche den Apsiden der Hauptellipse entsprechen.

Irgend ein, von zwei unendlich nahe liegenden Ordinaten begrenzter, als Rechteck aufzufassender Flächenstreifen, wie TL in Fig. 35, steht zu seiner Projektion TR offenbar gleichfalls in dem Verhältnisse von 1 : cos i, und dasselbe Verhältnis besteht auch zwischen einem Teile dieses Streifens und seiner Projektion. Mithin hat auch ein endlicher, von zwei beliebigen Ordinaten begrenzter Flächenteil — als Summe solcher Elementarstreifen — das gleiche Verhältnis. Überhaupt aber befindet sich in diesem nämlichen Verhältnisse irgend ein Flächenstück der Hauptellipse und seine Projektion. Denn jedes derartige Flächenstück läßt sich als Differenz zweier Summen von Elementarstreifen der obigen Art betrachten. Hieraus folgt aber ein anderer, sehr wichtiger Satz, daß nämlich nicht bloß die elliptischen Sektoren der Hauptellipse mit konstanter Flächengeschwindigkeit zurückgelegt werden — was nach den Keplerschen Gesetzen stattfinden muß —, sondern daß auch die Projektionen dieser Sektoren mit konstanter Flächengeschwindigkeit beschrieben werden. Denn die Projektion des Nebensterns durchläuft die Projektionsellipse in derselben Zeit wie der Nebenstern die Hauptellipse, und außerdem stehen die Projektionen jener Sektoren zu diesem selbst immer in demselben Verhältnisse, so daß gleichen Sektoren auch gleiche Projektionen entsprechen.

Ehe wir zur eigentlichen Bahnberechnung übergehen, haben wir nun noch eine hierbei sich aufwerfende Aufgabe zu lösen, nämlich die **Größe der Projektionen der eben betrachteten Sektoren** zu bestimmen unter der Voraussetzung, daß die Projektionsellipse nach Größe und Lage bereits bekannt ist und zwei Positionen des Nebensterns sowie ihre Zeiten (Zeitdifferenz) gegeben sind.

In Figur 36 bedeute ACB die Projektionsellipse, AB ihre große Achse, AC_1B den excentrischen, d. h. um die große Achse, als Durchmesser, geschlagenen Kreis, S den Ort des Hauptsterns, SY und SX die beiden Koordinatenachsen, die Punkte 1 und 2 zwei der beobachteten Nebenstern-Positionen. Nach unserer Voraussetzung sind sowohl die beiden Halbachsen a und b der Projektionsellipse, als auch die Lage ihres Mittelpunkts M sowie der Winkel w ihrer großen Achse mit der Achse der x, ferner die beiden Distanzen ϱ_1 und ϱ_2, die beiden

Positionswinkel p_1 und p_2 und die Zwischenzeit $t_2 - t_1$ der beiden Positionen als bekannt zu betrachten. Es handelt sich darum, die Fläche des Sektors (der Projektion des Sektors der wahren Ellipse)

(S, 1, 2)

zu bestimmen. Dieser Sektor ist zusammengesetzt aus dem Dreiecke (S, 1, 2) und dem (in der Figur schraffierten) elliptischen Abschnitte (1, 2), so daß man hat:

Sektor (S, 1, 2)
$= \triangle$ (S, 1, 2)
$+$ Abschnitt (1, 2).

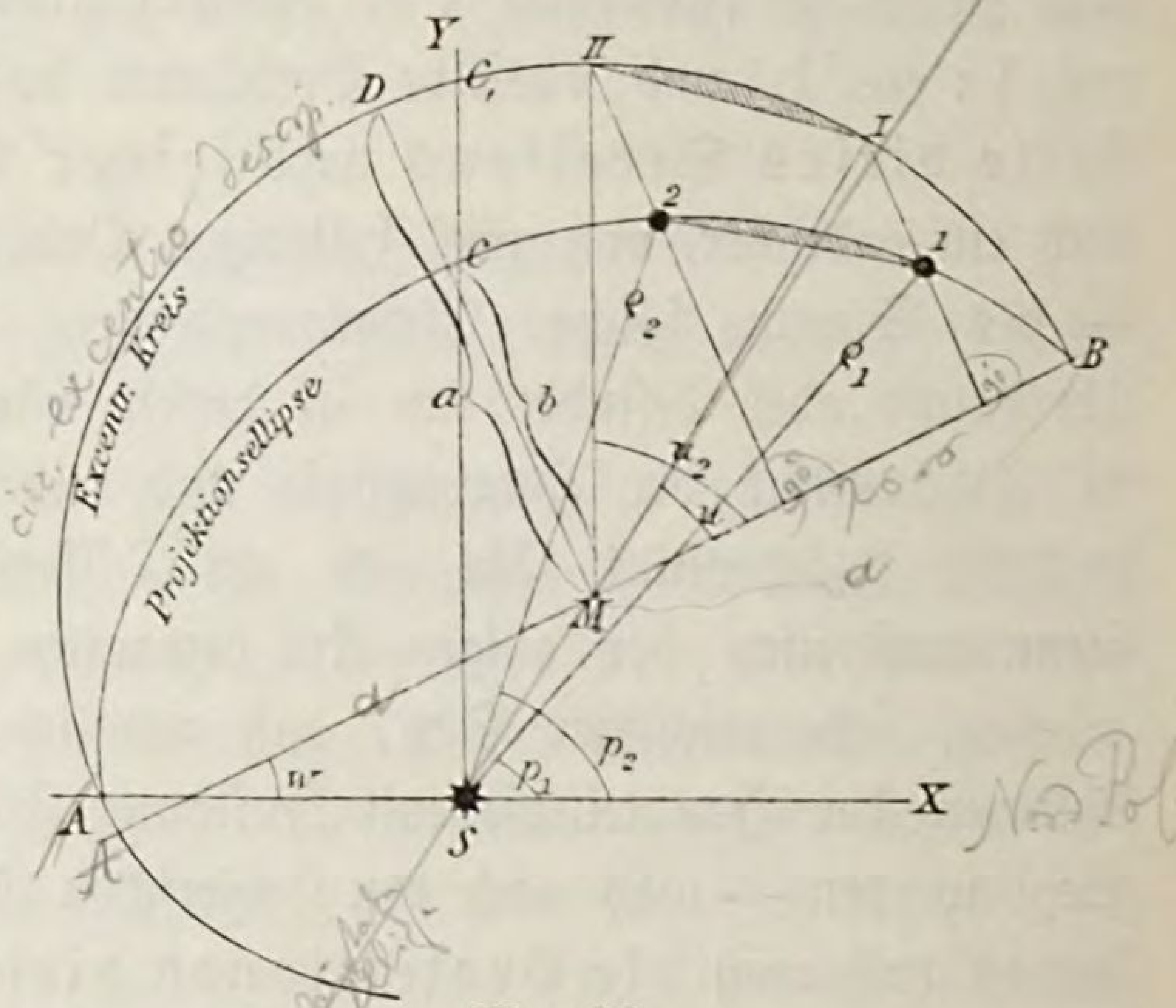


Fig. 36.

Das Dreieck ist ohne weiteres durch die Beobachtungen gegeben, denn man hat:

$$\triangle\ (S, 1, 2) = \tfrac{1}{2}\, \varrho_1 \varrho_2 \sin (p_2 - p_1).$$

Der elliptische Abschnitt (1, 2) aber ist gleich $\frac{b}{a}$ mal dem Kreisabschnitte (I, II). Denken wir uns nämlich den excentrischen Kreis so lange um den Durchmesser AB gedreht, bis die kleine Achse b der Projektionsellipse als Projektion des Halbmessers

$$MD = a$$

erscheint, dann läßt sich überhaupt die Projektionsellipse als Projektion des excentrischen Kreises auffassen, und der elliptische Abschnitt (1, 2) wird offenbar die Projektion des Kreisabschnitts (I, II), vorausgesetzt, daß die Verbindungslinien (I, 1) und (II, 2) der Endpunkte beider Abschnitte auf der Drehungsachse AB senkrecht stehen.

Nun ist aber

$$\frac{b}{a}$$

der Kosinus des Neigungswinkels zwischen der (gedrehten) Ebene des

excentrischen Kreises und der Ebene der Projektionsellipse. Also ist nach dem Vorhergehenden:

$$\text{ellipt. Abschnitt } (1, 2) = \frac{b}{a} \text{ . Kreisabschnitt } (I, II).$$

Wenn demnach der Kreisabschnitt gefunden werden kann, dann ist auch der elliptische Abschnitt als gegeben zu betrachten. Man hat aber:

$$\begin{aligned} \text{Kreisabschnitt } (I, II) &= \text{Kreissektor } (M, I, II) \\ &\quad - \text{Dreieck } (M, I, II) \,. \\ &= \tfrac{1}{2}\, a^2 (u_2 - u_1) - \tfrac{1}{2}\, a^2 \sin (u_2 - u_1), \end{aligned}$$

wenn man mit u_2 und u_1 die excentrischen Anomalien (vgl. S. 6 der 1. Abt. der theor. Astr.) bezüglich der Positionen 1 und 2 bezeichnet. Diese excentrischen Anomalien zu bestimmen, ist — nach Transformation der als bekannt vorausgesetzten Gleichung der Projektionsellipse auf ihre Hauptachsen — nur eine leichte geometrische Aufgabe. Wir erhalten also schließlich:

$$\begin{aligned} \text{Sektor}\,(S, 1, 2) = \triangle\,(S, 1, 2) + \text{Abschnitt}\,(1, 2) &= \tfrac{1}{2}\, \varrho_1 \varrho_2 \sin (p_2 - p_1) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\, a b\, [(u_2 - u_1) - \sin (u_2 - u_1)]. \end{aligned}$$

Bezeichnet man demnach mit

$$C$$

die (nach dem Obigen konstante) Flächengeschwindigkeit in der Projektionsellipse und mit $t_2 - t_1$ die Zwischenzeit der Positionen 1 und 2, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} C\, (t_2 - t_1) &= \tfrac{1}{2}\, \varrho_1 \varrho_2 \sin (p_2 - p_1) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\, a b\, [(u_2 - u_1) - \sin (u_2 - u_1)], \end{aligned}$$

so daß die Flächengeschwindigkeit der Projektionsellipse aus den oben als bekannt vorausgesetzten Größen mit Hilfe dieser Gleichung gefunden werden kann.

Da man ferner, unserer Annahme gemäß, die Fläche $a b \pi$ der Projektionsellipse kennt, so hat man auch die Umlaufszeit

$$U = \frac{a b \pi}{C},$$

und diese Umlaufszeit in der Projektionsellipse ist selbstverständlich einerlei mit der in der wahren Ellipse.

Endlich lassen sich auch noch die Zeiten

des Periastron und Apastron,

d. h. der Sternnähe und Sternferne ohne Schwierigkeit bestimmen, denn der Nebenstern befindet sich, nach dem Früheren, in den Apsiden seiner Bahn, wenn seine Projektion in die Schnittpunkte der Verbindungslinie SM (Fig. 36) mit dem Umfange der Projektionsellipse fällt. Nun lassen sich aber, wenn die letztere der Lage und Größe nach bekannt ist, die Örter dieser Schnittpunkte berechnen und — da die Flächengeschwindigkeit bereits feststeht — auch ihre Zeiten.

Nach diesen Erörterungen können wir uns bezüglich der Berechnung sowohl der scheinbaren als wahren Bahn kurz fassen, zumal es hier lediglich unser Zweck ist, die Aufmerksamkeit des Lesers auf die vorzugsweise maßgebenden Gesichtspunkte hinzulenken.

4. Bestimmung der Projektionsellipse.

Bei der soeben erläuterten Berechnung der Projektion des elliptischen Sektors, der Umlaufszeit und der Zeiten der Apsiden wurde die Projektionsellipse, nach Größe und Lage, als bekannt vorausgesetzt. Als nächste Aufgabe ergiebt sich deshalb, zu zeigen, wie aus den Beobachtungen die Projektionsellipse gefunden wird.

Wir gehen dabei von der einfachsten Annahme aus, daß nämlich

fünf Positionen, d. h. fünf Distanzen und Positionswinkel

vermöge der Beobachtungen gegeben seien.

Da eine Ellipse (überhaupt ein Kegelschnitt) der Größe und Lage nach aus fünf Punkten unmittelbar bestimmbar ist, so unterliegt in diesem Falle die Berechnung der Projektionsellipse keinerlei Schwierigkeiten, und es wird genügen, das hierbei anzuwendende Verfahren kurz in Erinnerung zu bringen, indem wir folgendes fingierte System von Beobachtungen zu Grunde legen (s. Fig. 37):

$$\varrho_1 = 4 \quad ; \; p_1 = 0$$
$$\varrho_2 = 2{,}74874; \; p_2 = 43^0\ 18',84$$
$$\varrho_3 = 2{,}23607; \; p_3 = 63^0\ 26',10$$
$$\varrho_4 = 1{,}79505; \; p_4 = 123^0\ 51',27$$
$$\varrho_5 = 2 \quad ; \; p_5 = 180^0.$$

Hieraus folgt zunächst:

$$x_1 = 4;\ y_1 = 0$$
$$x_2 = 2;\ y_2 = 1{,}88562$$
$$x_3 = 1;\ y_3 = 2$$
$$x_4 = -1;\ y_4 = 1{,}49071$$
$$x_5 = -2;\ y_5 = 0.$$

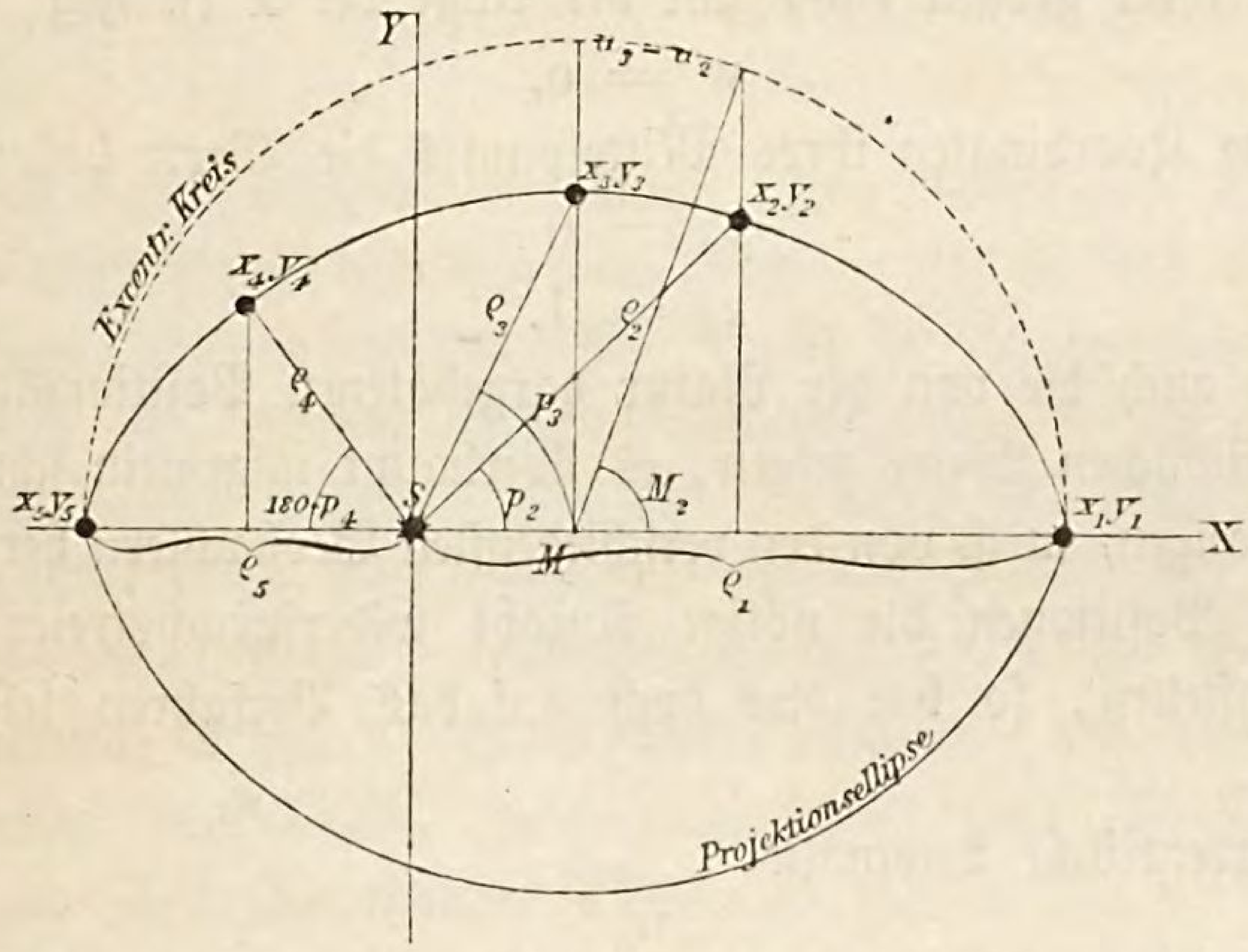


Fig. 37.

Da die allgemeine Ellipsengleichung in der Form

$$y^2 + a_1 x y + b_1 x^2 + c_1 y + d_1 x + e_1 = 0$$

dargestellt werden kann, so ergeben sich zur Bestimmung der fünf Konstanten

$$a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1 \text{ und } e_1$$

folgende fünf Relationen:

$$\begin{aligned}
&16\, b_1 && + 4\, d_1 + e_1 = 0\\
3{,}55556 + 3{,}77124\, a_1 + {}& 4\, b_1 + 1{,}88562\, c_1 && + 2\, d_1 + e_1 = 0\\
4 \quad + 2\, a_1 \quad + {}& b_1 + 2\, c_1 && + \quad d_1 + e_1 = 0\\
2{,}22222 - 1{,}49071\, a_1 + {}& b_1 + 1{,}49071\, c_1 && - \quad d_1 + e_1 = 0\\
&4\, b_1 && - 2\, d_1 + e_1 = 0.
\end{aligned}$$

Ihre Auflösung liefert:

$$a_1 = 0;\ b_1 = \frac{4}{9};\ c_1 = 0;\ d_1 = -\frac{8}{9};\ e_1 = -\frac{32}{9},$$

so daß die gesuchte **Gleichung der Projektionsellipse:**

$$y^2 + \frac{4}{9} x^2 - \frac{8}{9} x = \frac{32}{9}, \text{ oder}$$

$$9 y^2 + 4 (x - 1)^2 = 36.$$

Die Halbachsen derselben sind demnach:

$$a = 3$$

$$b = 2,$$

der Winkel ihrer großen Achse mit der Achse der x (s. Fig. 36) ist

$$w = o,$$

während die Koordinaten ihres Mittelpunkts die Werte haben:

$$y_0 = 0$$

$$x_0 = 1.$$

Wenn auch die von der Natur dargebotenen Positionskoordinaten nie solche einfachen Werte zeigen, es überhaupt ungemein schwierig ist, aus einer langen, meist von den verschiedensten Beobachtern herrührenden Reihe von Positionen die nötige Anzahl widerspruchsfreier Normalörter herzustellen, so hat dies doch auf das Verfahren selbst keinen Einfluß.

Die excentrische Anomalie

$$u_3$$

wäre im gegebenen Falle (s. Fig. 37) $= 90^0$ und

$$u_2$$

durch die Gleichung bestimmt:

$$\operatorname{tg} u_2 = \frac{a}{b} y_2 : (x_2 - x_3)$$

$$= 1,5 \,.\, 1,88562 : (2 - 1),$$

so daß man alle zur Berechnung des elliptischen Sektors

$$(S, x_2 y_2, x_3 y_3) = \tfrac{1}{2} \varrho_1 \varrho_2 \sin (p_2 - p_1) + \tfrac{1}{2} a b [(u_2 - u_1 - \sin (u_2 - u_1)],$$

und, wenn auch noch die von der 2. bis zur 3. Position verfließende Zeit bekannt ist, alle zur Berechnung der **Flächengeschwindigkeit** erforderlichen Angaben besitzt.

5. Berechnung der wahren Ellipse.

Wie die **Umlaufszeit** mit Hilfe der nunmehr bekannten Flächengeschwindigkeit gefunden wird, ist bereits früher angedeutet worden.

Um die Zeit des

Periastron,

dessen Projektion im Falle der Fig. 37 mit dem Punkte $x_5 y_5$ zusammenfällt, zu finden, müßte der Sektor (S, $x_3 y_3$, $x_5 y_5$) gesucht, durch die Flächengeschwindigkeit dividiert und die hierdurch erhaltene, zur Zurücklegung des Sektors erforderliche Zeit der Zeit der dritten Position hinzugefügt werden.

Die Excentricität

ε

ergiebt sich durch folgende Erwägung. Der Mittelpunkt M (s. Fig. 37) der Projektionsellipse ist nach dem Früheren die Projektion des Mittelpunkts der wahren Ellipse, der Punkt S (Hauptstern) stellt den Brennpunkt der wahren Ellipse und gleichzeitig — da er auch der Ebene der Projektionsellipse angehört — dessen Projektion dar, so daß die Strecke MS die Projektion der linearen Excentricität der Hauptellipse angiebt. Auch ist die Strecke (M, $x_5 y_5$) die Projektion der halben großen Achse der Hauptellipse. Da nun diese beiden Strecken in demselben Verhältnisse stehen, wie die lineare Excentricität und halbe große Achse der wahren Ellipse, so ist

$$\varepsilon = \frac{(MS)}{(M, x_5 y_5)} = \frac{1}{3} \text{ im Falle der Figur 37.}$$

Die mittlere Bewegung

n

ist unmittelbar durch die Umlaufszeit und die gewählte Zeiteinheit, die mittlere Anomalie

m

durch n und die Periastron-Zeit gegeben.

In Verbindung mit der Excentricität ε ergeben sich dann weiter für eine gegebene Zeit die

excentrische und die wahre Anomalie.

Angenommen, der Nebenstern befinde sich (s. Fig. 37) in der zweiten Position

zur Zeit t_2,

und in der dritten

zur Zeit t_3.

Für beide Zeiten können wir die wahren Anomalien

φ_2 und $\varphi_2 + v$

berechnen. Nach der Polargleichung der Ellipse ist aber:

$$\frac{r_3}{r_2} = \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi_2}{1 + \varepsilon \cos (\varphi_2 + v)},$$

so daß auch das Verhältnis der den beiden Positionen entsprechenden Leitstrahlen der wahren Ellipse bekannt ist. Sind nun in Figur 38 K_2 und K_3 die Örter des Nebensterns in der wahren Ellipse, welche den Projektionen P_2 und P_3 in der scheinbaren Ellipse entsprechen, und bezeichnet man die Winkel der Leitstrahlen r_2 und r_3 mit ihren Projektionen (Distanzen) ϱ_2 und ϱ_3 durch b_2 und b_3, dann ist ferner

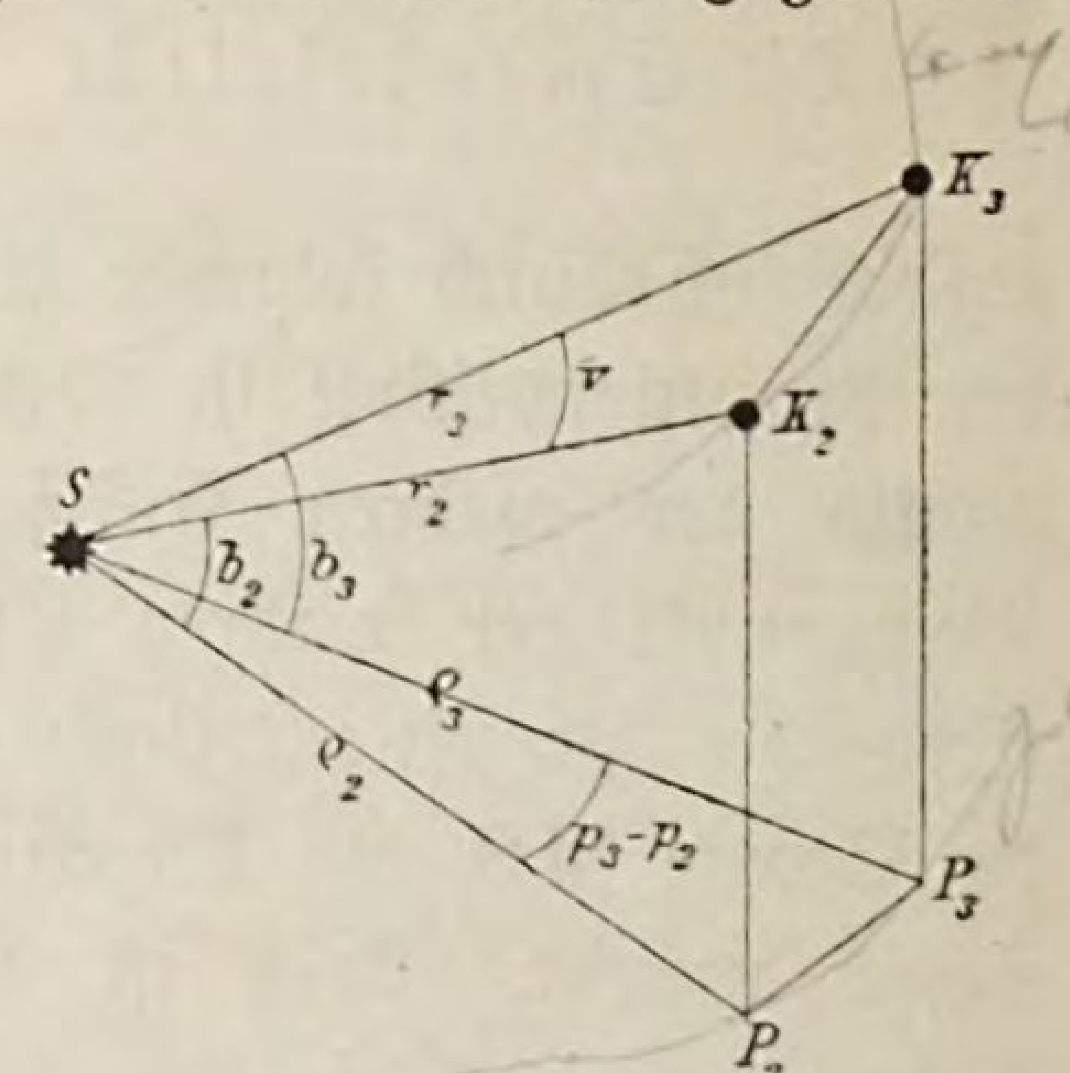


Fig. 38.

$$\frac{r_2 \cos b_2}{r_3 \cos b_3} = \frac{\varrho_2}{\varrho_3}, \text{ oder}$$

$$\frac{\cos b_2}{\cos b_3} = \frac{\varrho_2 \cdot r_3}{\varrho_3 \cdot r_2} = \frac{\varrho_2 \, [1 + \varepsilon \cos \varphi_2]}{\varrho_3 \, [1 + \varepsilon \cos (\varphi_2 + v)]}$$

und mithin auch das Verhältnis von

$\cos b_2 : \cos b_3$

bestimmt.

Bedeuten nun ferner in Figur 39
☊ $K_2 K_3$ die wahre sphärische Bahn,
☊ $P_2 P_3$ die scheinbare sphär. Bahn,
i die Neigung beider Bahnebenen,
S☊ die Knotenlinie,
ω den sphär. Abstand des Nebensterns zur Zeit der zweiten Position von dieser Knotenlinie,
λ den sphär. Abstand der zweiten Position vom Knoten,

dann entnimmt man der Figur leicht die folgenden Gleichungen:

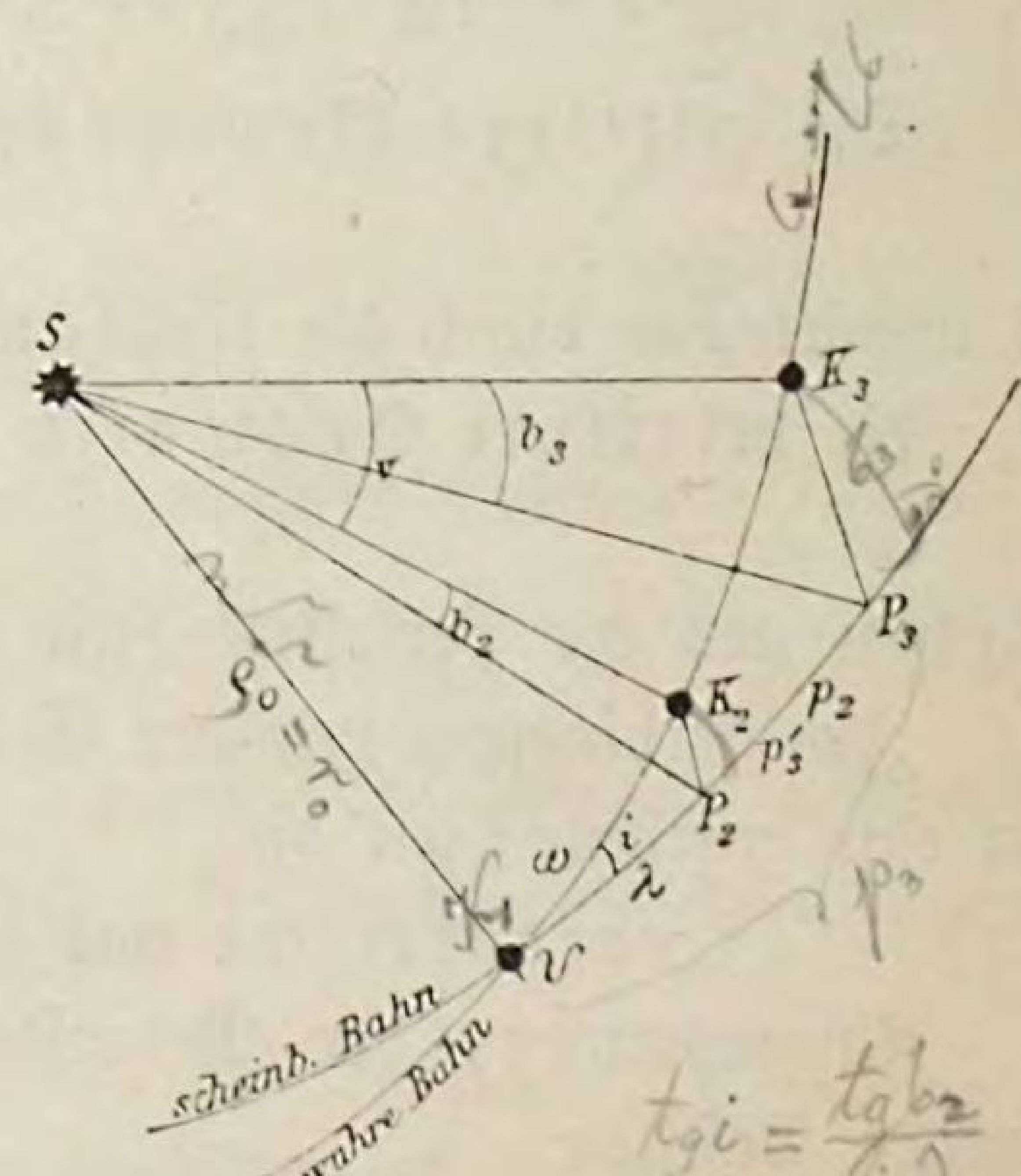


Fig. 39.

$$1) \quad \frac{\sin (\lambda + p_3 - p_2)}{\sin \lambda} = \frac{\operatorname{tg} b_3}{\operatorname{tg} b_2},$$

2) $\cos \omega = \cos b_2 . \cos \lambda$,

3) $\cos (\omega + v) = \cos b_3 \cos (\lambda + p_3 - p_2)$,

welche mit der oben entwickelten Gleichung

4) $$\frac{\cos b_2}{\cos b_3} = \frac{\varrho_2 [1 + \varepsilon \cos \varphi_2]}{\varrho_3 [1 + \varepsilon \cos (\varphi_2 + v)]}$$

zur Bestimmung der vier Unbekannten

$$\lambda , \omega , b_2 , b_3$$

hinreichend sind und dann unmittelbar zur Berechnung

der Neigung i

verwendet werden können.

Durch den Winkel λ ist der Abstand des Knotens von der zweiten Position gegeben. Die der Knotenlinie entsprechende, aus der Projektionsellipse ohne weiteres bestimmbare

Distanz ϱ_0 (cf. Fig. 39)

ist offenbar zugleich ein Leitstrahl der Hauptellipse. Bezeichnen wir, von diesem Gesichtspunkte aus, die erwähnte Distanz

durch r_0,

dann sind nunmehr auch — da nach dem Obigen die Verhältnisse $\frac{r_2}{r_0}$ und $\frac{r_3}{r_0}$ aus der Excentricität ε und den wahren Anomalien $\varphi_2 - \omega$, φ_2 und $\varphi_2 + v$ hervorgehen — die Leitstrahlen

r_2 und r_3

als bekannt zu betrachten.

Aus den drei Leitstrahlen

r_0, r_2 und r_3

sowie ihren Zwischenwinkeln

ω und v

lassen sich aber alle noch fehlenden Elemente der wahren Bahn in bekannter Weise herleiten.

Anmerkung.

Die vorhergehende Bestimmung einer Doppelsternbahn gründet sich auf die Beobachtung

von fünf Positionen

und die Kenntnis

der Zeiten zweier Positionen.

Die Bahn eines Binärsterns kann aber noch auf viele andere Weisen aus Beobachtungen gefunden werden, z. B. (cf. Encke im Berliner Jahrb. 1832 „Über die Berechnung der Bahnen der Doppelsterne")

aus vier Positionen und drei Zeiten.

Da im allgemeinen die Beobachtung der Positionswinkel geringeren Fehlern ausgesetzt ist als die der Distanzen, so hat man die Zuziehung der Distanzen möglichst zu vermeiden gesucht. Eine Distanz ist — zur Ermittelung der Bahndimensionen — mindestens erforderlich, und wenn man sich auf diese beschränkt, dann müssen (außer den Zeiten) noch sechs Positionswinkel hinzutreten, um das Problem lösen zu können.

Da der Verfasser nur die Absicht hatte, eine genaue Vorstellung von der Natur und der Behandlung des Problems zu geben, so hat er die vorstehende, einfachste Darstellung gewählt. Doch dürfte es denjenigen Lesern, welche für diesen Gegenstand ein besonderes Interesse hegen, auf Grund der vorstehenden Erörterungen leicht fallen, sich auch in den komplicierteren Methoden zurecht zu finden.

Um Gelegenheit zu geben, die Berechnung einer Doppelsternbahn im Anschlusse an wirkliche Observationen vorzunehmen, mögen hier noch folgende (innerhalb der Fehlergrenzen korrigierte) Beobachtungsdata und Rechnungsresultate bezüglich des Doppelsterns 70 p Ophiuchi mitgeteilt werden:

Beobachtungszeiten	Distanzen	Positionswinkel
$t_1 = 1779{,}77$	$\varrho_1 = 4'',40$	$p_1 = 0^0\ 0'$
$t_2 = 1803{,}38$	$\varrho_2 = 2'',70$	$p_2 = 122^0\ 32'$
$t_3 = 1820{,}20$	$\varrho_3 = 4'',17$	$p_3 = 288^0\ 9'$
$t_4 = 1823{,}27085$	$\varrho_4 = 4'',746$	$p_4 = 296^0\ 55'$

log a (halbe große Achse der Projektionsellipse) = 0,617892
log b („ kleine „ „ „) = 0,448845

log (SM), s. Fig. 36, = 0,206086 }
∢ MSX, s. Fig. 36, = 336° 35′ 19″,5 } Koordinaten des Mittelpunkts der Projektionsellipse

log a_1 (halbe große Achse der wahren Ellipse) = 0,636332
log b_1 („ kleine „ „ „ „) = 0,591921
log C (Flächengeschw. in der Projektion) = 9,695464
log C_1 („ „ „ wahren Ellipse) = 9,856980
Umlaufszeit U = 73,862 Jahren
Periastron-Zeit = 1806,877
Neigung i = 46° 24′ 56″, 9
Winkel der Knotenlinie mit der Abscissenachse = 122° 47′ 54″, 7.

Bevor auf das vorstehende Beispiel das oben dargelegte Verfahren angewendet werden kann, muß selbstverständlich aus den Elementen der Projektionsellipse zunächst noch eine fünfte Position berechnet werden.

Die Elemente einiger anderen Doppelsternbahnen:

	Umlaufszeit	Halbe große Achse	Excentricität	Periastronzeit
ζ Herculis	36^a 130^d	1″, 254	0,448	1830
ξ Ursae maj.	61^a 109^d	2,295	0,404	1815,5
α Centauri	77^a	15″, 5	0,950	1851,5
α Geminorum	632^a 99^d	6″, 3	0,240	1699,3

Anmerkung zu S. 55 der 1. Abteilung der theorischen Astronomie. Die Methode der Variation der Konstanten wurde zuerst von Euler, 1748, zur Lösung des Störungsproblems angewendet — nicht von Lagrange, wie an der angeführten Stelle behauptet wird.

Tafel der mittleren Oerter von 30 Hauptsternen.

Epoche: 1. Januar 1870.

Namen der Sterne		Größe	Rektascension	Jährliche Veränderung	Deklination	Jährliche Veränderung
α Leyer	Wega	1	18h 32′ 32″.2	2″.030	38° 39′ 51″ N	+ 3″.13
α Fuhrmann	Capella	1	5 7 5 .3	4 .422	45 51 45 N	+ 4 .15
α Stier	Aldebaran	1	4 28 27 .8	3 .435	16 14 44 N	+ 7 .62
α Bootes	Arkturus	1	14 9 43 .9	2 .734	19 51 37 N	− 18 .90
α Orion	Beteigeuze	1	5 48 8 .0	3 .246	7 22 49 N	+ 1 .04
α Löwe	Regulus	1.2	10 1 26 .8	3 .202	12 36 5 N	− 17 .42
α Adler	Altair	1.2	19 44 26 .3	2 .927	8 31 37 N	+ 9 .21
α Kleiner Hund	Procyon	1	7 32 29 .7	3 .145	5 33 22 N	− 8 .91
α Großer Hund	Sirius	1	6 39 25 .3	2 .645	16 32 25 S	+ 4 .66
β Orion	Rigel	1	5 8 17 .4	2 .880	8 21 15 S	− 4 .46
α Jungfrau	Spica	1	13 18 20 .7	3 .151	10 28 55 S	+ 18 .93
α Skorpion	Antares	1.2	16 21 26 .3	3 .667	26 8 28 S	+ 8 .39
α Südl. Fisch	Fomalhaut	1.2	22 50 27 .6	3 .329	30 18 38 S	− 18 .97
α Schiff	Canopus	1	6 21 4 .1	1 .330	52 37 32 S	+ 1 .84
α Eridanus	Achernar	1	1 32 52 .0	2 .235	57 53 52 S	− 18 .42
α Centaur		1	14 30 48 .3	4 .037	60 17 39 S	+ 15 .02
β Centaur		1	13 54 40 .3	4 .162	59 44 40 S	+ 17 .66
α Kreuz		1	12 19 22 .7	3 .265	62 22 38 S	+ 19 .93
α Kleiner Bär	Polarstern	2	1 11 17 .0	20 .197	88 36 59 N	+ 19 .09
α Großer Bär	Dubhe	2	10 55 41 .2	3 .765	62 28 7 N	− 19 .36
α Nördliche Krone	Gemma	2	15 29 11 .0	2 .538	27 9 14 N	− 12 .34
α Schwan	Deneb	2.1	20 37 0 .0	2 .043	44 49 1 N	+ 13 .69
α Pegasus	Marcab	2	22 58 17 .1	2 .983	14 30 23 N	+ 19 .31
α Zwillinge	Castor	2.1	7 26 18 .2	3 .842	32 10 15 N	− 7 .45
β Zwillinge	Pollux	2.1	7 37 21 .5	3 .681	28 20 16 N	− 8 .32
α Widder		2	1 59 50 .9	3 .367	22 50 47 N	+ 17 .22
α Andromeda	Sirrah	2	0 1 40 .2	+ 3 .086	28 22 22 N	+ 19 .90
β Löwe	Denebola	2	11 42 25 .6	3 .065	15 17 55 N	− 20 .10
α Wage	Zubeneschemali	2.3	14 43 41 .3	+ 3 .306	15 30 0 S	+ 15 .21
α Perseus	Algenib	2	3 15 3 .2	4 .248	49 23 45 N	+ 13 .17

Pierer'sche Hofbuchdruckerei. Stephan Geibel & Co. in Altenburg.

Israel-Holtzwart, Karl,

Elemente der theoretischen Astronomie

Bd.: 4

Wiesbaden 1885